5
7
224
BIBLIOTECA NAZIONALE
CENTRALE - FIRENZE

5.7.224

ELEMENTI
DI PERSPETTIVA

SECONDO LI PRINCIPII

DI BROOK TAYLOR

CON VARIE AGGIUNTE

SPETTANTI ALL'OTTICA,
E ALLA GEOMETRIA

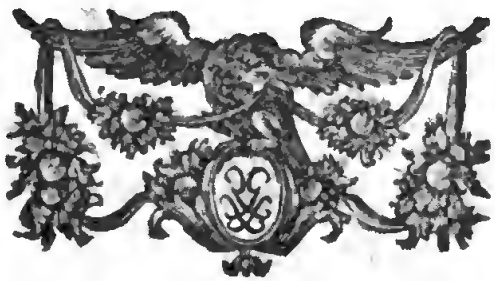
DEL PADRE

FRANCESCO JACQUIER

DELL' ORDINE DE' MINIMI

LETTORE DI FISICA NELL'UNIVERSITA'
DELLA SAPIENZA.

Della Libreria del Convento de Padri Minimi di S. Giuseppe di Firenze.



IN ROMA MDCCLV.

PER GENEROSO SALOMONI
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

Charitas

All' Eño, e Rño Principe

GIOACCHINO

CARDINAL PORTOCARRERO

FR. FRANCESCO JACQUIER.

OGLIONO gli Autori nel dedicare le loro opere a qualche illuſtre perſonaggio, implorare con lungo diſcorſo la protezione del loro Mecenate. Io perſuaſo e convinto della bontà, e

quaſi ardirei dirlo, dell'amicizia che ha verſo di me Vostra Eminenza, ſtimerei inutile il domandare con molte parole un favore, che io già ſono ben ſicuro di avere ottenuto. Ma ſe foſſe neceſſario di richiedere a Vostra Eminenza con maggiore premura una tale grazia, io ſarei nel caſo di rappreſentarle, come queſta mia opera è ſtata intrapreſa di ſuo conſiglio, e per così dire, nata nella ſua caſa. Io conterò ſempre tra i momenti li più fortunati, e li più glorioſi della mia vita quel poco tempo avanzato

zato da graviſſimi affari, che VOSTRA EMINENZA ſi degna impiegare meco a diſcorrere de' ſuoi anti ſtudj Matematici: io dico *meco*, riguardando come un'altro me ſteſſo il mio Collega ugualmente favorito da VOSTRA EMINENZA. Da queſte fortunatiſſime converſazioni ha avuto la ſua illuſtre origine il preſente libro, il quale perciò ſi trova in poſſeſſo di un diritto quaſi naturale alla protezione di VOSTRA EMINENZA. Nè mi debbo dilungare, ſiccome nelle dedicatorie coſtumar ſi ſuole, a celebrare le

Voſtre virtù. Chi evvi mai che non ſappia, che voi ſiete forſe quel ſolo, il quale ſia ſtato occupato a tanti ardui, e tanto fra loro diverſi impieghi con uguale ſucceſſo ed univerſale approvazione? Chi non ſa, che ora applicato ai doveri d'un privato cavaliere vi ornaſte la mente di quelle Scienze, che a quel grado più convenevoli ſono; ora chiamato a diverſi Miniſteri, e a militari comandi, e finalmente alle prime dignità della Chieſa, ſapeſte ſempre accoppiare le qualità di tanti ſtati differenti? Parla

tutto

tutto il Mondo delle eccellenti prerogative, di cui ſiete fornito, eſſendo il Voſtro Palazzo l'aſilo non ſolo di una nazione, ma di tutte quelle, che allettate dalla fama del Voſtro merito vengono più da vicino ad ammirare le Voſtre virtù; ed avendo ancor'io la ben'avventurata ſorte di eſſerne teſtimonio oculato, ardiſco preſentare a VOSTRA EMINENZA queſto debole ſaggio della mia gratitudine, della mia ſtima, e di quella venerazione, colla quale mi proteſto.

QUantum voluptatis atque admirationis cæperim, cum legerem Elementa Perſpectivæ una cum variis ad Geometriam, atque Opticam ſpectantibus additamentis, quæ celeberrimus, ac doctiſſimus P. Franciſcus Jacquier ſuo plane more conſcripſit, quiſque facile intelliget, qui eundem librum diligenter pervolverit; ſummam enim doctrinam, ingeniique vim incredibilem, qua tot maximæ res, atque utiliſſimæ & acutè detectæ, & plane, perſpicueque demonſtratæ ſunt, ſe inveniſſe lætabitur, quicumque in optimis hujuſmodi ſtudiis maxima cupit cum fruge verſari. Satisfactum profecto hìc eſt tam doctiſſimis Viris, qui ſublimiora tantummodo his in rebus exquirunt, quam iis etiam, qui mediocrem adhuc dederunt eiſdem operam. Itaque bonam, electamque legentium copiam non defuturam jure poſſum ominari, mihique amiciſſimo Scriptori eam gloriam, in cujus jam dudum poſſeſſione eſt, auctam maxime, ac cumulatam gratulari.

Benedictus Stay in Arch. Rom.
Eloquentiæ Profeſſor.

IMPRIMATUR,

Si iis, ad quos pertinet ita videbitur.

Nicolaus Maria de Vecchis
Arch. Rom. Rector.

IM-

IMPRIMATUR;

Si videbitur Reverendiſſimo Patri Magiſtro Sac. Pal. Apoſt.

F. M. de Rubeis Patriarcha Conſtantinop. Viceſg.

PER ordine del Reverendiſſimo Padre Maeſtro del Sagro Palazzo ho letto il libro intitolato *Elementi di Perſpettiva &c.* compoſto dal M. R. P. Franceſco Jacquier, nel quale nulla ho ritrovato di contrario alla Fede Cattolica; anzi per tutto vi ho ammirato un ordine naturaliſſimo, congiunto con una mirabile chiarezza (per quanto comporta l'indole dell'argumento), & una ſomma penetrazione del Chiariſſimo Autore in ſimil materia. Perlochè lo giudico degniſſimo delle ſtampe.

Dal noſtro Convento di S. Maria ſopra Minerva queſto dì 21. Maggio 1755.

F. G. B. Audifredi Bibliotecario Caſanatenſe.

IMPRIMATUR.

Fr. Vincentius Elena Mag. Socius Rmi P. Magiſtri Sac. Pal. Apoſt. Ord. Prædic.

Con

CON ſommo mio piacere ho letto tanto il trattato ſugoſo della Perſpettiva, quanto la copioſa, e comprenſiva Appendice, che vi ha aggiunta il dottiſſimo P. Jacquier, uomo così rinomato ovunque ſon conoſciute le lettere. Vi ſi vede generalmente quella penetrazione profonda, quella vaſta erudizione, quella perizia nel Calcolo, e nella Geometria la più ſublime, felicità nel ritrovare, chiarezza nel dimoſtrare, preciſione nell' eſprimere, che già da tanto tempo gli hanno aſſicurato nella letteraria republica uno de' primi poſti. Il merito, e la giuſtizia da me richiedono queſto publico atteſtato dell' interno mio ſentimento, aſſai più, che la ſtretta amicizia, che ci congiunge.

Ruggiero Giuſeppe Boſcovich
della Compagnia di Gesù.

PRE-

PREFAZIONE.

ANTI *ſono li trattati di Perſpettiva già dati alle ſtampe che potrebbe comparire ad alcuni affatto ſuperflua queſta nova opera. Non vi è forſe neſſuna parte di Matematica, che ſia ſtata più trattata dalli teorici, e meno ben eſeguita dalli pratici. Gli elementi di Geometria tanto neceſſarj nelle arti ſono ignorati, anzi diſprezzati dalla maggior parte degli artiſti medeſimi. Con tutto ciò non ſi deve credere, che un Geometra ben verſato nella teoria della Perſpettiva ſia perciò capace di eſeguire un diſegno con eleganza, e ſecondo le più eſatte regole dell'arte. Si vuole oltre la teoria una certa facilità di mano, e di diſegno, la quale non ſi può acquiſtare, che coll'eſercizio. Onde ſi vede quanto ſia ridicola queſta obiezione di alcuni, i quali con queſto ſofiſma ſi credono liberati dallo ſtudio della Geometria. Nè ſi può opporre, che vi ſono tanti eccellenti autori di Perſpettiva pratica ſenza ajuto della Geometria,*

tria. Io lodo moltiſſimo queſti libri, e ſe non correggono tutti gli errori, almeno ne correggono molti; ma accadono infiniti caſi nella Perſpettiva, i quali non ſi poſſono tutti deſcrivere, e ſpiegare in un libro; un uomo verſato nella teoria li comprenderà tutti, e ſaprà ridurli in eſecuzione.

L'univerſalità, e la brevità delli principj, tra molti trattati di Perſpettiva giuntimi alle mani, mi ha fatto ſempre preferire la Perſpettiva lineare del dottiſſimo Geometra Brook Taylor, il quale ha conſiderato li diverſi problemi nella loro maggiore eſtenſione ſenza alcuna limitazione, e determinazione de' piani. Non ſi deve fare menzione del celebre Brook Taylor ſenza gli elogj dovuti a uno delli più profondi Matematici di queſto ſecolo, e delli ſecoli precedenti. Il libro eccellente intitolato: Methodus incrementorum, *è un opera lodata da pochi, non perchè non ſia degna di tutta la lode, ma perchè è inteſa da pochiſſimi, tanto ſono ſublimi, e difficili le coſe delle quali tratta. Onde, ſenza volere far torto ad alcuno, devo avviſare chi non*

cono-

conoſce il noſtro Autore di non confonderlo con altri, che portano l'iſteſſo gran nome.

Il trattato di Perſpettiva del medeſimo Autore, benchè in un grado molto inferiore, è uno di quelli libri elementari che dimoſtrano un grand' uomo; anche nelle coſe piccole ſi conoſce ſempre un grand' ingegno. Io dunque perſuaſo del preggio di queſto metodo nel trattare la Perſpettiva, ho creduto fare una coſa utiliſſima col publicare queſti elementi, moſtrandone l'utilità in una copioſa Appendice, anche nelle parti le più ſublimi di matematica. Queſto trattato è come diviſo in due parti; la prima affatto elementare ſarà faciliſſima a quelli, che intendono la dottrina delle proporzioni. L' Appendice, che potrebbe chiamarſi ſeconda parte, contiene coſe più difficili, e trattate con ſomma brevità, eſſendomi propoſto ſolamente di far vedere con poche parole l'applicazione della Perſpettiva ad altre materie più ſublimi.

Eſſendo già ſtampata una gràn parte di queſto trattato, il Signor Calandrini dottiſſimo Profeſſore di Matematica mi man-

mandò un libro ſull' iſteſſa materia, del quale, tempo fa, mi aveva ſcritto l'Autore medeſimo il Signor Murdock celebre Geometra. Il detto libro in poche pagine contiene belliſſime coſe, le quali anche ſi ricavano dalli noſtri principj. Ne poſſo mancare alla mia intima amicizia, e ſingolare venerazione verſo un Geometra inſigne il Signor Clairaut, il quale nelle memorie dell'Academia di Parigi nell'anno 1731. ha trattato colla ſua ſolita eleganza il Problema 2. del num. V.

Gli uomini ſtudioſi di queſto piccolo libro non ci troveranno figure ben diſegnate, delle quali ſogliono eſſere pieni li trattati volgari di Perſpettiva più per ſodisfazione degli occhj, e guadagno delli Libraj, che per inſtruzione della mente. Io ſono perſuaſiſſimo, che coll'ajuto di pochi precetti ben inteſi, e coll'eſercizio della ſola Perſpettiva lineare ſi poſſa arrivare ad una perfetta cognizione di queſt'arte; e queſta cognizione acquiſtata per gradi, e non tutta in un ſubito, deve eſſere il fine di tutti gli elementi.

Rimane ora che io mi diſcolpi, ſe eſſendo foreſtiere ho avuto l'ardire di ſcrivere

vere in una lingua a me poco familiare. Faranno le mie ſcuſe molti uomini poco intelligenti di lingua latina, per li quali principalmente è ſcritta la prima parte di queſta opera. Mi ſcuſa ancora la lingua della Geometria tanto facile, e, per così dire, univerſale, che io non devo in queſta ſorte di materia incorrere la taccia di temerità, che avrei meritata ſcrivendo in altro genere.

PER-

Digitized by Google

PERSPETTIVA LINEARE

PARTE PRIMA.

DEFINIZIONI.

Def. 1. LA perſpettiva lineare è l'arte di rappreſentare con eſattezza ſopra un piano un' oggetto qualunque.

Per formarſi un'idea chiara, e diſtinta delli principj di queſt' arte, ſi deve conſiderare una pittura perfetta, come l'oggetto medeſimo ſituato nel luogo proprio, talmente che lo ſpettatore non poſſa, o almeno difficilmente, diſtinguere la pittura dall'oggetto vero. A queſto effetto è neceſſario, che i raggi di luce vengano all'occhio dello ſpettatore da tutte le parti della pittura colle medeſime circoſtanze di direzione, di luce, di ombra, e di colori, come farebbero

bero venendo dalle parti corrispondenti dell'oggetto stesso.

Sia O l'occhio dello spettatore (*fig.* 1.) diretto verso il cubo *abcde*, del quale l'originale sia ABCDE; la luce partendo da un punto qualunque, *a*, della pittura, deve percuotere l'occhio dello spettatore secondo la medesima direzione, colla medesima forza di luce, e ombra come farebbe venendo dal punto corrispondente A dell'originale, secondo il raggio AO. Queste tre circostanze costituiscono le tre parti della pittura. Primo il disegno, che consiste nella posizione, e conseguentemente nelle forme delle figure dipinte; il che ben'eseguito secondo le regole di matematica e non per pura prattica, o come si suole dire, colle dita e coll'occhio, forma l'arte della perspettiva. Secondo il colorito. Terzo l'arte della luce e delle ombre, chiamata volgarmente *chiaro oscuro*. Li principj di queste tre parti, ma particolarmente quelli della perspettiva dipendono dalla precedente riflessione; e sopra di essa stabilirò tutte le seguenti dimostrazioni.

Def. 2. Se le linee tirate secondo una certa legge dalle differenti parti d'una figura qualunque, incontrano un piano, nel quale descrivano una figura, la figura così disegnata si chiama *projezione* della prima figura. Le linee che producono queste projezioni, prese insieme sono chiamate *sistema dei raggi*, e se questi raggi passano tutti per un medesimo punto, si chiamano *cono dei raggi*, il quale cono viene chiamato *co-*

no

no ottico, se il detto punto sia l'occhio dello spettatore.

*Def.*3. Se il sistema delli raggi è tale, che vengano tutti paralleli tra di loro, e perpendicolari all'orizonte, e che di più la projezione sia fatta in un piano parallelo all'orizonte, questa projezione si chiama *iconografia* della figura proposta. Sia il piano GHIK (*fig.*2.) parallelo all'orizonte, e i raggi A*a*, B*b*, C*c* venendo da diversi punti dell' ottaedro ABCDEF, sieno perpendicolari all'orizonte, e paralleli tra di loro, la projezione *abcde*, formata dalli medesimi raggi è chiamata iconografia della figura ABCDEF.

*Def.*4. Se il sistema delli raggi è tale, che sieno paralleli tra di loro, e all'orizonte, e che di più la projezione si faccia in un piano perpendicolare a questi raggi, e all' orizonte. La detta projezione si chiama *ortografia* della figura proposta. Li raggi A*a*, B*b*, C*c* &c. (*fig.*2.) essendo paralleli all'orizonte e tra di loro, di più il piano GHLM della projezione essendo perpendicolare alli raggi, *abcdef* è l'ortografia della figura ABCDEF.

Queste sono le definizioni volgari delle parole iconografia, e ortografia. Ma io devo avvertire, che in questo trattato mi allontanerò dalle definizioni generalmente ricevute, adoprando questi due termini per significare due projezioni qualunque formate da' sistemi di raggi paralleli, essendo i medesimi sistemi perpendicolari tra di loro, e alli piani di projezione, come nella figura presente, senza considerare in alcuna maniera

la loro relazione coll'orizonte. In queſta ſpecie di projezione chiamerò la projezione di un punto, o d'una linea, la *poſizione* del punto, o della linea nel piano di projezione. Per eſempio, *a*, è la poſizione del punto A nel piano GHIK, e *ae* è la poſizione della linea AE nel piano GHLM.

*Def.*5. Se la projezione è formata da un cono di raggi, viene chiamata *ſcenografia*. Per eſempio (*fig.*7.) la figura *abcde*, ſegnata nel piano FGHI, dal paſſaggio dei raggi AO, BO, CO &c. che partono da diverſi punti del cubo ABCDE, e che convengono in O, ſi chiama la ſcenografia della figura ABCDE. Queſta projezione è la perſpettiva della figura reſpettivamente all'occhio poſto in O, come ſarà dimoſtrato in appreſſo. E' evidente, che queſta iſteſſa projezione viene prodotta dalle ombre delle figure, conſiderando il corpo luminoſo come un punto; abbenchè nel caſo del Sole, e della Luna, queſto punto eſſendo a una diſtanza infinita per riguardo alli noſtri ſenſi, li raggi ſieno fiſicamente paralleli. Il gran Newtono ha indicato in poche parole tutta la teoria delle ombre, ma la materia eſſendo ſublime non deve aver luogo in queſti elementi di perſpettiva fatti anche per quelli, che non ſanno più della Geometria commune. Onde ſarà meglio di ſpiegare queſta bella e difficile dottrina in una delle Appendici che aggiungerò a queſto trattato.

*Def.*6. Il *punto di veduta* ſi chiama quel punto, nel quale è poſto l'occhio dello ſpettatore. Queſto punto è la ſommità del cono ottico, come

ſarà

sarà evidente dal teorema 2., nel quale si dimostrerà, che la perspettiva d' un oggetto qualunque è la projezione scenografica del medesimo.

*Def.*7. Se dal punto di veduta si tira una perpendicolare al quadro, il punto in cui la detta linea incontra il quadro è chiamato il *centro* del quadro; la distanza da questo centro ed il punto di veduta viene chiamata *distanza* del quadro.

*Def.*8. Se per il punto di veduta si concepisce un piano parallelo al quadro, questo piano è chiamato *piano dirigente*.

*Def.*9. Per oggetto *originale*, o sia punto, o linea, o superficie, o solido s'intende l'oggetto reale da ridursi in perspettiva.

*Def.*10. Per piano *originale* s'intende il piano nel quale è posto l'oggetto originale, o sia punto, o linea, o figura piana.

*Def.*11. Il punto, in cui una linea originale qualunque, prolungata se sia necessario, incontra il quadro, è chiamato *interzezione* della linea.

*Def.*12. L'interzezione commune d'un piano originale qualunque, e del quadro è chiamata semplicemente *interzezione*.

*Def.*13. Il punto, in cui una linea originale qualunque incontra il piano dirigente, è chiamato il *punto dirigente* della linea originale; e la linea condotta dal punto dirigente al punto di veduta è chiamata *direttrice* della linea originale.

*Def.*14. La commune interzezione d'un piano originale qualunque, e del piano dirigente è chiamata *linea dirigente* del piano originale.

*Def.*15. Una linea condotta dal punto di veduta, parallela ad una linea originale qualunque, è chiamata ſemplicemente *parallela* della medeſima linea originale.

*Def.*16. Un piano, che paſſa per il punto di veduta, ed è parallelo ad un piano originale qualunque, viene chiamato ſemplicemente *parallelo* del medeſimo piano originale.

*Def.*17. Il punto, in cui la parallela d'una linea originale incontra il quadro, è chiamato punto *evaneſcente* della medeſima linea, e la diſtanza tra queſto punto evaneſcente, ed il punto di veduta è chiamata ſemplicemente *diſtanza* del punto evaneſcente.

*Def.*18. La linea, in cui il parallelo d'un piano originale qualunque taglia il quadro, è chiamata linea *evaneſcente* del medeſimo piano; e ſe dal punto di veduta ſi conduca una linea che incontri la detta linea evaneſcente ad angoli retti, il punto ove cade la perpendicolare ſi chiama *centro* della medeſima linea. La diſtanza tra il detto centro, e il punto di veduta è chiamata ſemplicemente *diſtanza* della medeſima linea evaneſcente.

*Def.*19. La perſpettiva d'una figura qualunque ſi dice *projezione* della medeſima.

Per formarſi un' idea chiara delle precedenti definizioni il lettore deve immaginarſi, che il piano ABC (*fig.*3.) ſia il piano del quadro, O il punto di veduta (*Def.*6.) ODE il piano dirigente parallelo al quadro (*Def.*8.), FG una linea originale

nale (*Def.*9.) nel piano originale FGH (*Def.*10.), il quale taglia il quadro in BI, ed il piano dirigente in DE. Sia OAC un piano parallelo al piano originale FGH, e del quale la commune interſezione col quadro ſia la retta AC. Sia la linea OV parallela alla linea originale FG, ed incontri il quadro in V. FG incontri il quadro in B, ed il piano dirigente in D. Suppoſte tutte queſte, B è l'interſezione della linea originale FG (*Def.*11.), D il ſuo punto dirigente (*Def.*13.), V il ſuo punto evaneſcente (*Def.*17.), OD la ſua direttrice (*Def.* 13.), OV diſtanza del punto evaneſcente V (*Def.*17.), BI è l'interſezione (*Def.*12.), DE la linea dirigente (*Def.*14.), OAC il parallelo (*Def.*16.), AC la linea evaneſcente (*Def.*18.) del piano originale FGH. Se ſi condurrà la linea OS perpendicolare alla linea evaneſcente AC in S, il punto S ſarà il centro, e SO ſarà la diſtanza della linea evaneſcente AC (per l'iſteſſa definizione.)

Aſſioma 1. La commune interſezione di due piani è una linea retta.

Aſſioma 2. Se due linee ſi tagliano in un punto, o ſono tra di loro parallele, ſi potrà far paſſare un piano per ambedue le linee.

Aſſioma 3. Se tre linee rette ſi tagliano vicendevolmente, o ſe due di loro eſſendo parallele vengono tagliate da una terza, ſaranno tutte tre nel medeſimo piano, cioè un piano, che paſſa per due di loro, paſſerà ancora per la terza.

Assioma 4. Ogni punto di una linea retta sta nel piano della medesima retta.

Lemma 1. Se BSO, e AEBD (*fig.*4.) sieno due piani, i quali si taglino ambedui nella retta ASB, e che da un punto qualunque O d'uno di questi piani si conducano due linee, delle quali una OS sia perpendicolare alla retta AB in G, e l'altra OC incontri il piano AEBD ad angoli retti in C, condotta la retta CS, sarà perpendicolare ad ASB.

La dimostrazione di questo lemma si ricava facilmente dalla proposizione 2. del libro XI. degli Elementi. Imperocchè nella linea ASB si concepiscano due punti A, B ugualmente distanti da S, la linea OS essendo perpendicolare ad AB, il punto O sarà ugualmente distante da BA. Onde saranno uguali le rette OA, OB. Di più immaginandosi le rette CB, CA, si avranno li triangoli rettangoli OCB, OCA, nelli quali saranno uguali i lati CB, CA (*prop.*47. *lib.* 1.), e per conseguenza il punto C essendo ugualmente distante dalli punti B, A ugualmente distanti da S, sarà CS perpendicolare ad ASB.

TEOR. I.

Una linea condotta dal centro del quadro al centro della linea evanescente è perpendicolare alla detta linea evanescente.

DIM.

DIM.

Sia AEBD (*fig.*4.) il piano del quadro, O il punto di veduta, OSB il piano parallelo, del quale la commune interſezione col quadro è la linea evaneſcente ASB. Sia S il centro della detta linea, e, C il centro del quadro. Condotte OS, e OC ſi uniſcano i punti C, S colla retta CS, ſarà OS perpendicolare ad AS (*Def.* 18.), ed OC perpendicolare al piano AEBD (*Def.* 7.). Onde CS è perpendicolare ad AS (*Lem.* 1.).

Cor. La diſtanza OS d'una linea evaneſcente qualunque ASB, è l'ipotenuſa d'un triangolo rettangolo, del quale i lati ſono la diſtanza del quadro OC, e la diſtanza CS tra il centro della linea evaneſcente, ed il centro del quadro.

TEOR. II.

La perſpettiva, o projezione d'un oggetto qualunque è la projezione ſcenografica dell'iſteſſo oggetto ſul piano del quadro, ed il punto di veduta è la ſommità del cono ottico.

DIM.

La luce deve arrivare all'occhio O dello ſpettatore (*fig.* 1.) da un punto qualunque *a* della perſpettiva, come farebbe dal punto corriſpondente A dell'oggetto originale (*Def.* 1.). Onde è evi-

evidente, che li raggi *a*O, AO ſono nella medeſima retta; e per conſeguenza il raggio AO paſſa per il punto *a* del quadro, e tutta la projezione *abcde* è la projezione ſcenografica della figura originale ABCDE, il cono ottico eſſendo OABCDE, del quale la ſommità è il punto di veduta O.

Cor. 1. la projezione d'una linea retta è una linea retta; imperocchè il cono ottico ODE, che produce la projezione *d e* d'una linea qualunque DE, diventa la ſuperficie del triangolo piano ODE, tutti i raggi, che vengono al punto O dalli differenti punti della linea DE, eſſendo nel piano, che paſſa per le linee DO, e EO. Onde *d e* è l'interſezione del quadro col triangolo ODE, e conſeguentemente la detta interſezione è una linea retta (*Aſs.* 1.).

Cor. 2. L'originale della projezione può eſſere un'altro oggetto qualunque, che produrrebbe l'iſteſſo cono di raggi. Per eſempio, l'originale della projezione *de* può eſſere un altra retta *de*, che produrrebbe il cono ottico ODE, come viene prodotto dalla DE.

Si può domandare con ragione, perchè le figure rappreſentate in un quadro compariſcono eſſere l'oggetto medeſimo, che rappreſentano. Si potrebbe riſpondere, che la mente noſtra à acquiſtato l'uſo di giudicare delli oggetti, che hanno certe relazioni di luce, d'ombra, di forma, e di ſituazione. Tutte queſte circoſtanze ſono neceſſarie alla perfezione del quadro; benchè un ſemplice diſegno ſia alcune volte quaſi baſtante

per

per esprimere la relazione delle parti, come si osserva in un pavimento, nel quale le pietre compariscono quadrate, benchè siano espresse con figure irregolarissime. Questo effetto deve attribuirsi alla relazione delle parti; imperocchè la rappresentazione di ogn'uno di questi quadrati difficilmente comparirebbe quadrata, se non vi fossero altri oggetti, i quali ce ne facessero giudicare diversamente, attesa la relazione che hanno con essi. Si potrebbero a questo proposito aggiugnere molte altre riflessioni; ma la materia è più metafisica, che matematica.

E' notissima la storia del Giovane, al quale il Cheselden fece l'operazione della cateratta. Le osservazioni sopra li primi fenomeni di questa vista nascente sono descritte nelle transazioni filosofiche *n.*402., e possono servire di spiegazione alla presente difficoltà.

TEOR. III.

La projezione d'una linea retta, che non sia parallela al quadro, passa per l'intersezione della detta linea, e per il punto evanescente.

DIM.

Sia *fg* (*fig.*3.) la projezione della linea originale FG: essendo FO, GO li raggi, che producono le proj zioni *f*, *g* delli punti F, G (*Teor.*2.) sarà *fg* l'intersezione del quadro col piano del trian-

triangolo OFG. Ma tutta la linea FGB ſta nel medeſimo piano, e conſeguentemente l'interſezione B (*Aſſ.*4.). Dunque la linea *fg* prolungata paſſa per B. Il che era da dimoſtrarſi in primo luogo. Eſſendo OV parallela ad FG (*Def.* 17.), eſſa giace nel piano del triangolo OFG. Onde *fg* prolungata paſſa per il punto V. Che era da dimoſtrarſi in ſecondo luogo. Queſto teorema è il principale fondamento di tutta la perſpettiva prattica, perciò il lettore deve renderſelo familiare. Per maggiore facilità il ſenſo di queſto teorema è eſpreſſo nella figura 1., nella quale la projezione *bc* incontra la linea originale BC nell'interſezione K, e paſſa per il punto evaneſcente V prodotto dalla parallela OV.

Scol. Se la linea originale paſſa per il ſuo punto evaneſcente, tutta la projezione diventa il punto evaneſcente medeſimo; onde in queſto caſo la linea ſvaniſce; e per queſto motivo pare a propoſito il termine di evaneſcente. A queſta ragione ſi aggiunge, che la projezione d'un oggetto tanto è più piccola, e nell'iſteſſo tempo più vicina del punto evaneſcente, quanto l'oggetto è più lontano ſopra una linea qualunque, e finalmente quando la projezione cade ſul detto punto, ſvaniſce la di lei grandezza, imperocchè l'oggetto originale è a una diſtanza infinita. Ciò ſi capiſce facilmente rappreſentandoſi un'uomo che fugge da noi in una lunga camminata, eſſo compariſce più piccolo quanto è più diſtante. La ragione di queſta apparenza è evi-

è evidente dalli Corollarj ſeguenti, e dalla figura prima, nella quale le linee uguali e parallele, CD, BA, poſte ſopra la medeſima retta BA, formano delle projezioni *ba*, *cd* tanto più piccole quanto queſte linee ſono più lontane, talmente che la linea eſſendo in una diſtanza infinita, il punto *a* cada in *b*, nel quale caſo la projezione ſvaniſce.

Cor. 1. Le projezioni delle linee originali che ſono parallele tra di loro, ma non al quadro, paſſano tutte per il medeſimo punto evaneſcente. Imperocchè non hanno che una medeſima parallela commune a tutte, e conſeguentemente il medeſimo punto evaneſcente. Ciò ſi vede nella figura 1. in cui la projezzione *da*, e *cb*, delle parallele DA, CB, ſi incontrano nel commune punto evaneſcente V.

Cor. 2. Il centro del quadro è il punto evaneſcente delle linee perpendicolari al quadro. (*Def.* 7. 15. 17.)

THEOR. IV.

La projezione d'una linea parallela al quadro è parallela alla linea originale.

DIM.

Sia EF il piano del quadro (fig. 5.), AB la linea originale parallela al medeſimo, e *ab* la projezione; ſuppoſto O il punto di veduta, e OAB

è OAB il cono ottico, (*theor.*2.) *ab*, è l'interſezione del quadro col piano del triangolo OAB, onde AB, eſſendo parallela al piano EF, ſarà *ab*, parallela ad AB, imperocchè ambedue le linee ſono nel piano del triangolo OAB, e non s'incontrano. Poichè ſe s'incontraſſero la loro commune interſezione ſarebbe nel piano EF, e conſeguentemente AB, non ſarebbe parallela al piano EF.

*Cor.*1. Le projezioni delle linee parallele tra di loro, e al quadro, ſono parallele. Per eſempio *ab*, *dc*, ſono parallele tra di loro, e alle linee originali AB, CD.

*Cor.*2. La projezione *abcd*, d'una figura piana qualunque parallela al quadro, è ſimile alla figura originale. Imperocchè conducendo la diagonale AC, e la projezione corriſpondente *ac*, li lati, *ab*, *bc*, *ac*, ſono paralleli agli lati originali corriſpondenti, AB, BC, AC. Onde gli angoli in *a*, *b*, *c*, ſono uguali agli angoli corriſpondenti A, B, C, e conſeguentemente il triangolo *abc*, è ſimile al triangolo ABC. Nell' iſteſſa maniera, *acd* è ſimile ad ACD, e per ciò tutta la figura *abcd*, è ſimile alla figura ABCD.

*Cor.*3. Nel medeſimo caſo, la lunghezza d'una linea qualunque *ab*, nella projezione è alla lunghezza della linea originale AB, come la diſtanza del quadro è alla diſtanza trà il punto di veduta e il piano della figura originale: Sia OgG, perpendicolare a queſti due piani in *g*, G,

g, G, sarà *ab* : AB = O*a* : OA = O*g* : OG (*prop.*7. *lib.*11. *elem.*) ma *g* è il centro, O*g* è la distanza del quadro, OG è la distanza tra il punto di veduta O, ed il piano originale ABCD. Onde *ab* è a AB come la distanza del quadro è alla distanza trà il punto di veduta ed il piano della figura originale.

TEOR. V.

La projezione d'una linea è parallela alla sua direttrice.

DIM.

Le linee OF, OG, OD, *fg* (*fig.*3.) sono tutte nell'istesso piano (per la spiegazione data dopo la def.19. e per il theor.3.). Ma il piano dirigente ODE, è parallelo al piano del quadro ABIC (*def.*8.). Onde la dirrettrice OD è parallela alla projezione *fg* (*prop.*16. *lib.*11. *delli elem.*)

*Cor.*1. Le projezioni delle linee che hanno la medesima direttrice, sono parallele.

*Cor.*2. La direttrice d'una linea originale parallela al quadro, è parallela alla medesima originale, e conseguentemente questa direttrice sta in un piano parallelo al piano della linea originale; onde la linea evanescente di questo piano, e la projezione della linea sono parallele.

TEOR.

TEOR. VI.

La linea evaneſcente, l'interſezione, e la linea dirigente d'un piano originale qualunque ſono parallele tra di loro.

DIM.

Li piani NVC, DFH (*fig.*3.) eſſendo paralleli (*def.*16.) ſiccome ancora li piani ODE, CAB (*def.*8.), la linea evaneſcente CV, l'interſezione IB, e la linea dirigente ED ſono parallele (*prop.*16. *lib.*11. *elem.*)

Cor. La diſtanza *f*V tra la projezione d'un punto qualunque, ed il punto evaneſcente V, ſta alla diſtanza BV tra l'interſezione B, ed il medeſimo punto evaneſcente V, come la diſtanza OV di queſto punto evaneſcente V, è alla diſtanza DF, tra il punto dirigente, ed il punto originale F. Imperocchè OVBD, è un parallelogrammo, e perciò BV = DO : di più li triangoli *f*OV, OFD, ſono ſimili, eſſendo li lati V*f*, e OD paralleli, onde *f*V : VO = DO (BV) : DF.

TEOR. VII.

Li punti evaneſcenti di tutte le linee in un piano originale qualunque, ſono nella linea evaneſcente del piano.

DIM.

DIM.

Poichè tutte le linee originali ſono nell' iſteſſo piano, le parallele a queſte ſteſſe linee che paſſano tutte per il medeſimo punto di veduta ſaranno tutte in un piano parallelo (*prop.* 15. *lib.* 11. *elem.*) onde tutti li punti evaneſcenti ſono nella linea evaneſcente.

Cor. 1. Li piani originali paralleli tra di loro hanno la medeſima linea evaneſcente.

Cor. 2. Il punto evaneſcente della commune interſezione di due piani originali, è l'interſezione delle loro linee evaneſcenti. Poichè il punto evaneſcente della commune interſezione deve ritrovarſi nelle linee evaneſcenti di ambedue i piani, e per conſeguenza nell'interſezione delle linee evaneſcenti.

Cor. 3. La linea evaneſcente d'un piano perpendicolare al quadro paſſa per il centro del quadro.

TEOR. VIII.

Le interſezioni di tutte le linee nel medeſimo piano originale, ſono nell'interſezione di queſto piano.

Queſta propoſizione è evidente dalle definizioni 11. e 12.

Cor. 1. L'interſezione della commune interſezione di due piani originali, è l'interſezione

delle loro interſezioni. Poichè l'interſezione della commune interſezione deve eſſere nell'interſezione di ambedue i piani, e conſeguentemente nell'interſezione delle loro interſezioni.

*Cor.*2. Li piani delli quali la commune interſezione è parallela al quadro hanno le interſezioni parallele; imperocchè la commune interſezione eſſendo parallela al quadro non incontra mai il quadro, onde la ſua interſezione col quadro è nulla. Dunque ancora è nulla l'interſezione delle interſezioni delli piani (*Cor.* 1.) cioè le dette interſezioni ſono parallele. Di più ſono parallele le linee evaneſcenti delli medeſimi piani. (*Teor.*6.)

PROBL. I.

Eſſendo dato il centro del quadro, e data anche la diſtanza, trovare la projezione d'un punto, del quale la poſizione ſul quadro, e la diſtanza ſiano date.

Sia S il centro del quadro (*fig.*6.) e, *b*, la poſizione data del punto originale. Si conduca ad arbitrio la retta SO, uguale alla diſtanza del quadro. Sia condotta *b*A, uguale alla diſtanza della poſizione data, e parallela alla SO. Tirando S*b*, e A*o*, il punto d'interſezione *a*, ſarà la projezione cercata.

DIM.

Supponiamo l'angolo OS*b*, retto, e conſeguentemente ancora l'angolo A*ba*, immaginan-

nandoſi allora che li triangoli SO*a*, e *b*A*a* ſi rivolgano intorno alla linea S*ab*, come aſſe, finchè SO, e *b*A diventino perpendicolari al quadro, O ſarebbe il punto di veduta, A, il punto originale, e AO, il raggio che incontra il quadro in *a*, ove ſarà conſeguentemente la projezione del punto A. (*teor.* 2.) Ma il punto *a*, rimane l'iſteſſo qualunque ſia l'angolo OS*b*, poichè per la ſimilitudine delli triangoli OS*a*, A*ba*, ſi ha ſempre S*a* : *ab* = SO : *b*A, la quale proporzione non dipende dall'angolo OS*b*. Onde in tutti i caſi il punto *a*, è la projezione d'un punto del quale la poſizione ſul quadro è *b*, e la diſtanza della poſizione è *b*A.

Cor. 1. Avendo condotta la linea S*b*, ſi può colla regola, e col compaſſo ritrovare il punto *a*, dividendo la retta, S*b*, in *a*, talmente che S*a*, ſia ad *ab*, come la diſtanza del quadro SO ſta alla diſtanza *b*A, della poſizione del punto originale.

Cor. 2. Si può con queſta medeſima propoſizione ritrovare la projezione d'una linea qualunque, ritrovando le projezioni di due punti di queſta linea, e conducendo una linea per le due projezioni trovate.

PROBL. II.

Eſſendo data la poſizione, e l'interſezione della linea originale aſſieme coll'angolo, che fa l'originale colla ſua poſizione, eſſendo dato

di più il centro del quadro colla distanza, ritrovare la projezione della linea originale, il punto evanescente, la distanza del detto punto.

Sia DE (*fig.6.*) la posizione data della linea proposta, D la sua intersezione, S il centro del quadro. Si conduca DC, la quale faccia l'angolo EDC, uguale all'angolo della linea originale colla sua posizione. Sia condotta SV parallela a DE, e SO perpendicolare alla SV, ed uguale alla distanza del quadro. Si conduca OV, parallela a DC, che tagli SV in V, e si tiri DV, sara V, il punto evanescente, OV la sua distanza, e DV la projezione indefinita della linea proposta.

DIM.

Immaginiamo i piani OSV, CED, rivolgersi intorno alle linee SV, DE, come assi, finchè diventino perpendicolari al quadro. Sarà O il punto di veduta, DC la linea originale, alla quale essendo OV, parallela, sarà V, il punto evanescente (*Def.*17,) e conseguentemente DV, la projezione cercata. (*teor.*3.)

*Cor.*1. Si può trovare la projezione d'una parte AC, della linea originale DAC, conducendo le linee AO, CO, come raggi visuali che tagliano DV, in *a*, *c*. Imperocchè li punti *a*, *c*, dipendono solamente dal paralleliſmo delle linee OV, DC, e dalla loro proporzione: essendo *a*V : *a*D = VO : DA, e CV : CD = VO : DC per la simi-

ſimilitudine delli triangoli *a*VO, *a*DA, e *c*VO, *c*DC. Per maggior chiarezza ſi potrebbe paragonare la figura 6. colla terza, nella quale li punti O, V, *f*, *g*, B, G, F corriſpondono alli punti O, V, *c*, *a*, D, A, C.

*Cor.*2. Eſſendo ritrovata la DV, ſi potrà trovare la projezione *c*, d'un punto qualunque C, colla regola, e col compaſſo, facendo *c*V : *c*D = OV : CD.

PROBL. III.

Eſſendo data la projezione d'una linea col ſuo punto evaneſcente, trovare la projezione d'un punto che divide la linea originale in ragione data.

Sia AB (*fig.*7.) la projezione data, V, il punto evaneſcente. Si conduca ad arbitrio la retta VO, alla quale ſi faccia parallela *ba*, e per un punto qualunque O, della linea VO, ſi conduchino OA, e OB, che incontrino *b*, *a*, in *a*, e *b*. Si divida *ab* in *c*, nella proporzione data, e ſi tiri OC, la quale taglia AB in C. Sarà C la projezione cercata, l'originale di BC, eſſendo all'originale di CA, come *bc*, a *ca*.

DIM.

Eſſendo OV parallela a, *ba*, ſi può conſiderare *ba*, come la linea originale e OV come la ſua parallela, e conſeguentemente O, come

il punto di veduta e aO, bO, cO, come i raggi visuali, che producono la projezione delli punti A, B, C.

Cor. Poichè li triangoli BCb,OBV sono simili sarà CB; Cb = BV : OV, e CB = $\frac{BV \times Cb}{OV}$. Di più per la similitudine delli triangoli AOV, ACA, sarà AC : AV = ac : OV, e CA = $\frac{AV \times aC}{OV}$, onde sostituendo in vece di aC, Cb, le loro proporzionali ca, cb, sarà CA : CB = $\frac{AV \times ac}{OV}$: $\frac{VB \times cb}{OV}$ = AV × ac : VB × cb, Perciò si potrà trovare il punto C, colla regola, e col compasso, facendo CA : CB = AV × ac : VB × cb.

PROBL. IV.

Essendo data la projezione d'una linea col suo punto evanescente, da un punto dato nella stessa projezione tagliare un segmento che sia la projezione d'una parte data dalla linea originale.

Sia AB la projezione data (*fig.*8.), V, il punto evanescente, e C, sia il punto dal quale si deve tagliare il segmento. Sia condotta ad arbitrio VO, alla quale si faccia parallela abc, e da un punto qualunque O, in VO, siano condotte OA, OB, OC. che tagliano ab, in a, b, c.

Si

Si prenda *cd*, ad, *ab*, come la parte data dell' originale è all'originale di AB, e ſia condotta, O*d*, che taglierà AB in D. Sarà CD il ſegmento œrcato.

DIM.

Se ſi concepiſſe OV, come la linea evaneſcente di qualche piano, che paſſa per l'originale di ABV, eſſendo *abcd* parallela alla detta linea evaneſcente, potrà eſſa conſiderarſi come la projezione d'una linea parallela al quadro (*Cor.*2. *Teor.*5.) Onde le parti *ab*, *cd* ſaranno proporzionali alle loro linee originali (*Teor.*4) Ma eſſendo V il punto evaneſcente, le originali di O*a*, O*b*, O*c*, O*d* ſono parallele (*Cor.*1. *teor.*3.) Dunque l'originale di CD ſta all' originale di AB, come *cd* è a *ab*, (*prop.*2. *lib.*6. *elem.*)

Scol. Queſta propoſizione potrebbe dimoſtrarſi come la precedente, la quale può eſſere conſiderata come un caſo particolare, cioè, quando il punto C, di queſta propoſizione coincide con uno delli punti A, B.

Cor. Si potrebbe trovare il punto D, colla regola, e col compaſſo: imperocchè le linee D*m*, C*s*, *qg*, *r*A eſſendo parallele a D*a*, ſi avrà la ragione di DC, a DV colle ſeguenti analogie DC: DV = C*m*: *mo*, ma, *mo*: D*m* = O*c*: *dc*, dunque $mo = \frac{Oc \times Dm}{dc}$; onde ſarà DC:

$DV = Cm : \frac{Oc \times Dm}{dc} = Cm \times dc : Oc \times Dm$,

Di più $Cm : Dm = CO : VO$, dunque $DC\ DV = CO \times dc : cO \times VO = Cs \times dc : bc \times VC$, ſoſtituendo in vece di $CO : cO$, la ragione uguale $Cs : bc$. Di più $Cs : VO = BC : BV$, dunque $DC : DV = BC \times dc : bc \times BV$. Ma $bc : qB = ob : OB$, onde $DC : DV = BC \times dc \times BO : BV \times Bq \times bO = CV \times dc \times BO : BV \times Vo \times bo$, per la ſimilitudine delli triangoli BCq, VCO. Inoltre ſono ſimili li triangoli bOr, BOg, onde ſarà $DC : DV = CV \times dc \times Bg : BV \times VO \times ab$. Ma $Bg : VO = AB : AV$, dunque finalmente $DC : DV = CV \times dc \times AB : BV \times AV \times ab$.

PROBL. V.

Eſſendo dato il centro colla diſtanza del quadro, ritrovare la linea evaneſcente d'un piano del quale è data l'interſezione coll'angolo della ſua inclinazione al quadro, e ritrovare ancora il centro e la diſtanza della linea evaneſcente.

Sia AB (*fig.* 9.) l'interſezione data del piano, e, C, il centro del quadro. Si conduca CO, parallela ad AB, ed uguale alla diſtanza del quadro, e ſia CA, perpendicolare ad AB. Di più ſi tiri OS, che tagli AC in S, talmente che l'angolo OSC ſia uguale all'inclinazione del piano originale al quadro. Sia condotta SD, parallela ad AB, ſarà SD, la linea evaneſcente cercata, S il ſuo centro, e OS la ſua diſtanza.

DIM.

DIM.

Immaginiamo il triangolo OSC, alzato ſopra il piano del quadro talmente che OC, ſia perpendicolare al quadro, in queſto caſo ſarà O, il punto di veduta, e SD, eſſendo parallela ad AB, il piano che paſſa per SD, e per il punto O, ſarà il parallelo d' un piano originale qualunque che paſſa per AB, e inclinato al quadro nell'angolo OSC. Onde SD, è la linea evaneſcente cercata; E poichè OS, per la ſuppoſizione, è perpendicolare a SD, ſarà S, il centro, SO la diſtanza della linea evaneſcente SD.

Scol. Prendendo OC, per raggio, CS è la cotangente, e OS la coſecante dell'inclinazione del piano originale al quadro.

PROBL. VI.

Data l' interſezione d' un piano originale colla ſua linea evaneſcente, dato il centro colla diſtanza della detta linea evaneſcente, ed avendo di più le figure originali diſegnate nella loro eſatta proporzione, ritrovare la projezione d'una linea qualunque nel piano originale.

Sia DF (*fig.* 10.) l'interſezione data, HG, la linea evaneſcente della quale il centro ſia S, ſi conduca SO, perpendicolare a GH, e uguale alla diſtanza della linea evaneſcente GH, e ſi concepiſca il piano originale X, abbaſſato ſul qua-

quadro e veduto come a traverſo di uno ſpecchio.

Sia Y, il piano parallelo ſimilmente piegato ſopra il quadro, e ſia AB, la linea originale della quale ſi cerca la projezione. La retta AB, tagli l'interſezione in D, e ſia condotta OG, parallela ad AB, che tagli la linea evaneſcente in G. Si conduca DG, che ſarà la projezione indefinita di AB. Per i punti A, B, ſiano tirate ad arbitrio le rette AC, BC, le quali ſi tagliano in C, e ſi trovino nell'iſteſſo modo le loro projezioni indefinite FI, e EH le quali tagliano DG, in *a*, *b*. Sarà *ab*, la projezione determinata di AB, eſſendo *a*, la projezione delle eſtremità A, e, *b*, la projezione dell'eſtremità B.

In un' altra maniera.

Sia KL, la linea originale data, ſi ritrovi come di ſopra, la ſua projezione indefinita QG. Si conducano OK, OL, che tagliano la QG, in *k*, *l*, ſaranno li punti *k*, *l*, le projezioni delle eſtremità K, L.

In un altra maniera per mezzo della direttrice.

Sia EF (*fig.* 11.) l'interſezione data, e ſia il piano originale talmente abbaſſato ſul quadro, che la linea dirigente ſi trovi nel piano HI, eſſendo la diſtanza tra le linee AF, HI, uguale alla diſtanza della linea evaneſcente data. Sia di più il punto di veduta O, traſportato ſul quadro aſſieme col piano dirigente HOI. Si troverà la projezione indefinita d'una linea originale qualunque AB, prolungando la detta linea

nea finchè tagli EF in F, e HI in G. Tirando di poi OG e conducendo F*a*, parallela ad OG, ſarà, F*a* la projezione indefinita cercata. Trovando inoltre nell'iſteſſa maniera la projezione indefinita E*d*, d'un altra linea qualunque AD, che paſſa per A, l'interſezione *a* di queſta projezione con F*a*, ſarà la projezione di A, e ſi avrà nell'iſteſſa maniera l'altro punto *b*. Ovvero queſte due eſtremità poſſono ritrovarſi tirando la linea dalli punti A, B, al punto O, come nella conſtruzione precedente.

DIM.

Si concepiſcano le figure piegate (*fig.*10.) in DF, HG; e (*fig.*11.) in EF, HI, finchè il piano originale, il ſuo parallelo, il piano dirigente, e con eſſi il punto di veduta O, arrivino nel loro proprio ſito. Allora il punto D (*fig.*10.) e, F, (*fig.*11.) ſarà l'interſezione di AB, e, G (*fig.*11.) ſarà il ſuo punto dirigente, ma OG (*fig.*10.) è parallela ad AB, e perciò G è il ſuo punto evaneſcente, e DG la ſua projezione indefinita (*teor.*3.). F*a*, (*fig.*11.) è ſempre parallela ad OG, che è la direttrice di AB; perciò F*a*, e la projezione indefinita di AB. (*teor.*5.) E evidente che *a*, trovato per l'interſezione di FI con DG (*fig.*10.), e di E*d* con F*a* (*fig.*11.) è la projezione dell'interſezione delle linee originali AB, AC (*fig.*10.) e di AB, AD (*fig.*11.) L'altra coſtruzione colle linee AO, è la medeſima

ſima che colle linee AO, CO, per ritrovare li punti *a*, *c*, nella fig. 6. come è ſpiegato nel *cor.* 1. del *Probl.* 2.

Scol. 1. Il lettore poco eſercitato nelle materieMatematiche potrà concepire più facilmente la maniera di traſportare il piano originale, il ſuo parallelo, e il piano dirigente col punto di veduta nel piano del quadro, immaginando (*fig.* 3.) queſti piani traſportati aſſieme allargandoſi li angoli OVB, ODB finchè queſti piani coincidano, e che il piano originale ſia veduto per di dietro.

Scol. 2. Le projezioni *ad*, *kl*, ſono parallele (*fig.* 11.) avendo le loro originali ambedue la medeſima direttrice, conforme al *Cor.* 1, del *teor.* 5. l'iſteſſo ſi può oſſervare in *lm*, e *cd* che hanno la medeſima direttrice OI.

PROBL. VII.

Eſſendo date le medeſime coſe, come nel Problema precedente, ritrovare la projezione d'una figura qualunque.

Si trovino le projezioni delle differenti parti della figura data come nel Problema precedente. Per eſempio, la projezione *klmnp*, (*fig.* 10.) del pentagono KLMNP, ſi trova in queſta maniera. Conducendo OG, OH, OI, OV parallele a KL, LM, MN, KP riſpettivamente, li punti G, H, I, V ſaranno i loro punti evaneſcenti, e le rette KL, LM, MN eſſendo prolungate tagliano DR nelle interſezioni Q, R, T, onde

onde tirando QG, RH, TI, si avranno le projezioni *l*, *m*, delli punti L, M, per la loro mutua intersezione. Tirando allora OK, e ON si avranno li punti *k*, *n*. Conducendo di più la retta KV al punto evanescente V di KP, si avrà la projezione indefinita di KP. Finalmente conducendo OP, si avrà il punto *p*. Si ritroveranno le projezioni delle figure curvilinee cercando le projezioni di diversi loro punti, e unendole insieme. Per esempio (*fig*, 13. *n*. 1.) essendo DE, l' intersezione, e VF la linea evanescente, O, il punto di veduta, e ABC, un cerchio originale posto come nel Problema precedente, la projezione *a*, d'un punto qualunque A può trovarsi conducendo ad arbitrio AD alla quale sia OV parallela. Tirando allora DV, e OA, esse s' incontrano nel punto cercato *a*, secondo la costruzione del Probl. 6. D, essendo l'interzezione, e, V il punto evanescente della linea AD. Le diverse linee AD, essendo condotte tutte parallele l'una all'altra, il medesimo punto evanescente V, può servire per tutte.

Overo sia num. 2. VF la linea dirigente trasportata sul quadro come nella figura 11. rimanendo tutte le altre cose come sopra, si condura ad arbitrio AD, che taglia DE e VF in D e, V, conducendo allora OV alla quale si faccia D*a*, parallela; si avrà la projezione *a*, tirando OA, che taglia D*a* in *a*. Adoperando il medesimo punto V, per tutti i punti A, tutte le linee D*a* saranno parallele tra di loro e alla stessa linea OV.

PRO-

PROBL. VIII.

Ritrovare la projezione d'una figura qualunque in un piano parallelo al quadro.

La projezione essendo simile all' originale (*cor.*2. *teor.*4.) si fa un esatta copia della figura originale, e si fanno li lati omologi nella proporzione spiegata *cor.*3. del medesimo teorema.

PROBL. IX.

Essendo data l'intersezione d'un piano, la sua linea evanescente col suo centro, e la distanza, trovare l'originale d'una projezione qualunque data sul quadro.

Sieno le cose disposte nella figura 10. come ne' Problemi 6. 7. sia proposto di ritrovare l'originale della figura *klmnp*. Prolungando le projezioni *kl*, *lm*, *mn*, finchè taglino l'intersezione, e la linea evanescente nelle loro intersezioni Q, R, T, e nelli loro punti evanescenti G, H, I. Sia di più prodotta la *kp*, fino al suo punto evanescente V, siano condotte OG, OH, OI, OV, e QK, RM, TN parallele alle tre prime dette rispettivamente; li punti d' intersezione L, M saranno li punti originali di *l*, *m* siano tirate O*k*, e O*n* che taglieranno QL, e DM, nelli punti originali K, e, N di *k*, *n*. Tirando KP parallela ad OV, e prolungando O*p*, che la taglia in P, sarà P, l'originale del punto *p*.

Final-

Finalmente conducendo NP, si avrà la figura originale cercata KLMNP.

DIM.

La costruzione è evidente dal Problema 7. che è l'inverso di questo.

Scol. Nella medesima maniera si potrebbe ricercare la figura originale per mezzo delle direttrici come nella fig 11.

PROBL. X.

Essendo date le medesime cose del Problema precedente, ritrovare la lunghezza dell'originale.

Sia I. II. la projezione data (*fig.* 10.) restando la figura come nelli Problemi precedenti. Si produca I. II. finchè incontri la linea evanescente nel punto evanescente V, e si conduca VO. Nella linea evanescente si prenda $V3 = VO$, e si conducano 3I. 3II. che tagliano l'intersezione in 1. 2. Sarà 1. 2. la lunghezza cercata dell'originale di I. II.

DIM.

Sia W l'intersezione di I. II. Essendo $V3$, uguale ad VO distanza del punto evanescente V, ed $W2$ essendo parallela ad $V3$, il punto 3. può essere considerato come il punto di veduta,

e $W12$

e W 12 come la linea originale, e 31. 32. poſſono riguardarſi come li raggi viſuali che formano la projezione I. II.

Cor. La lunghezza 1. 2. potrebbe ritrovarſi colla regola, e col compaſſo facendo 1. 2. : V_3. (VO) = I. II. x W V : IV x IIV. Imperocche condotta la retta II. e parallela a 2. 1.

Sarà 3. II. : II. e = 3. 2. : 2. 1. onde 2. 1. = $\frac{3.2. \times II.}{3.II.}$ e di più II e : II. I. = 1. W : IW. Perciò II. e = $\frac{II. I \times 1. W}{I. W.}$ e conſeguentemente 2. 1. = $\frac{3.2. \times II. I. \times 1 W}{2. II. \times I. W}$. In oltre V_3 : 1. W = V I : I W. Dunque V_3 = $\frac{1 W \times V I.}{I W}$

Dunque 1. 2. : V_3. = $\frac{3.2. \times 11. I. \times 1. W :}{3. 11. \times I W}$

$\frac{I. W \ V I.}{I W}$ = 3. 2. x II. I : V I x 3. 11 = III. x W V : II. V x I V : eſſendo 3. 2. : 3 II. = WV : II. IV.

PROBL. XI.

Data la linea evaneſcente d'un piano col centro e la diſtanza della detta linea, data di più la projezione d'una linea nell'iſteſſo piano, ritrovare la projezione d'un altra linea nel medeſimo

desimo piano, che faccia un angolo dato colla prima.

Sia O (*fig.* 10.) il punto di veduta, come nelli Problemi precedenti, GH essendo la linea evanescente, e *ab*, la projezione data, si domanda di condurre *ac*, talmente che l'originale dell'angolo *bac*, sia uguale ad un angolo dato. Si produca *ab*, sino al suo punto evanescente G. Si conducano GO, OI che facciano l'angolo GOI uguale all'angolo dato. Dal punto I si tiri I*ac*, che sarà la linea cercata.

DIM.

Sia intesa la figura come nelli Problemi precedenti, e sia AB, l'originale di *ab*, e conseguentemente parallela ad OG (*Def.* 15. *teor.* 3.) Per l'istessa ragione, AC parallela ad OI è l'originale di *ac*, essendo I il suo punto evanescente (*teor.* 3.). Ma AB e AC essendo parallele a OG, OI, l'angolo BAC, è uguale all'angolo GOI, che è uguale all'angolo dato, per la costruzione. Onde l'angolo *bac*, che è la projezione dell'angolo BAC, è ancora la projezione dell'angolo dato.

Scol. Se si richiedesse l'angolo *abc*, che è la projezione dell'angolo ABC, basterebbe fare l'angolo GOH, uguale al complemento dell'angolo ABC, a due retti. Imperocchè sia CB l'originale di *cb*, e conseguentemente parallela ad OH,

(*teor.*3.) essendo H il punto evanescente. Di più poichè AC, è parallela ad OI, sarà l'angolo HOI uguale all'angolo BCA. Ma GOI è uguale all'angolo BAC. Dunque tutto l'angolo GOH è uguale al complemento dell'angolo ABC a due retti. (*lib.*1. *elem. prop.*32.)

PROBL. XII.

Data la linea evanescente d'un piano col suo centro e colla distanza; di più data la projezione d'un lato d'un triangolo dato di specie, ritrovare la projezione di tutto il triangolo.

Le projezioni cercate delli altri lati si ritrovano per li problemi precedenti, essendo dati li angoli del triangolo. Data la projezione *ab*, (*fig.*10.) del lato AB, nel triangolo ABC, si ritrova il punto evanescente I del lato *ac*, facendo l'angolo IOG uguale all'angolo CAB, e si ha il punto evanescente H del lato *bc*, prendendo l'angolo HOG uguale al complemento dell'angolo CBA a due angoli retti.

Scol. Se il punto evanescente della linea data *ab*, fosse troppo lontano, si potrebbe procedere in quest'altra maniera. Prendendo per intersezione una linea qualunque DR, parallela alla linea evanescente HG (*teor.*6.) e conducendo due linee H*b*E, I*a*F ad arbitrio per *b*, e, *a*, si trovino li originali A, B delli punti *a*, *b*, (*Probl.*9.) e si conduca AB. Di poi sopra il lato

lato AB, si finisca il triangolo originale, e si ritrovino le projezioni cercate delli altri lati (*Probl.*7.)

PROBL. XIII.

Data la linea evanescente d'un piano col suo centro e colla distanza. Data ancora la projezione d'un lato d'una figura qualunque in questo piano, ritrovare la projezione di tutta la figura.

Si divida tutta la figura data in triangoli col mezzo delle diagonali, e si ritrovino le projezioni di tutti questi triangoli (*Probl.* 12.) principiando da quelli che hanno la linea data per uno dei loro lati.

Si può fare l'istesso in diverse maniere, applicando li problemi precedenti, secondo che riuscirà più commodo nelli diversi casi, come si capirà meglio dalli Esempj seguenti.

ESEMPIO I.

Sia IK la linea evanescente (*fig.*14.) della quale sia S il centro, e OS la distanza. AB parallela ad IK sia la projezione data del lato d'un esagono regolare. Si conduca OG parallela ad IK (*Def.*15.) l'originale di AB essendo parallela al quadro (*Cor.*2. *Teor.*5.) li punti evanescenti H, I, K delli lati, e delle diagonali BC, FE, AD, AF, BE, CD, AC si troveranno (*per il probl.*11.) facendo li angoli HOG di 60°, IOG

di 120°, KOG di 30°. Conducendo di poi AK, BH, si avrà il punto C. Tirando AH, CI si avrà il punto D. Conducendo DE parallela ad IK, e tirando AS, si avrà il punto E; imperocchè S è il punto evaneſcente di AE, l'originale dell'angolo EAB, eſſendo un angolo retto per la natura dell'eſſagono, come anche è retto GOS, e l'originale di AB eſſendo parallela al quadro. Finalmente tirando EH, e AI si ha il punto F, ed è compita la figura cercata.

ESEMPIO II.

Sia MRPTQS (*fig.* 15.) l'iconografia d'un icoſaedro regolare appoggiato ſopra una delle ſue facce, ſi troverà la ſua projezione, eſſendo data la projezione *ab* del lato AB, e VX eſſendo la linea evaneſcente, e, O il punto di veduta, come nelli problemi precedenti. L'iconografia originale ſi deſcrive facendo due eſſagoni regolari concentrici, e paralleli AFBICH, RMSQTP, delli quali i lati omologi ſiano nella proporzione delle parti d'una linea tagliata in media, e eſtrema ragione (*Def.* 3. *lib.* 6. *Elem.*), e conducendo le linee, come ſi vede nella figura. Queſta coſtruzione è evidente dalla propoſ. 16. del libro 13. delli elementi. Avendo prolungato *ab* fino al ſuo punto evaneſcente V, li punti evaneſcenti W, e X delli due altri lati del triangolo *abc* ſi ritrovano per il Probl. 11. Dipoi conducendo ad arbitrio SP parallela ad VX, e tirando W*a*, e W*b*, che

che la tagliano in *a*, *b*, e dividendo *ab* in *k*,*d*,*e*,*l* nella medeſima proporzioue di AB, nei punti K, D, E, L; tirando di più KW, *d*W, *e*W, *l*W ſi avranno le projezioni *k*, *d*, *e*, *l* delli punti K, D, E, L (*Probl.*3.) conducendo *d*X, *e*W, e *e*X ſi avranno li punti *f*, *g*. Conducendo *g*V ſi avranno li punti *b*, *i*. Tirando KX, e LW ſi hanno il punto *m*, ed il punto *n*, che è la projezione di N per l'interſezione di KX, e di LW già tirata. Facendo dipoi *do*, e *op* ogn'una uguale a *md*, e conducendo *o*W, *p*W, ſi hanno li punti *o*, *p* (*Probl.*3.) tirando *p*V ſi ha il punto *q* per la ſua interſezione con *l*W. Condotte *o*W, e *n*V ſi ſi ha *r*, e facendo *ms* ugule ad *md*, tirata *s*W, ſi ha *s*. Finalmente conducendo *s*X, che taglia *ro*W, ſi avrà il punto *t*. Il reſtante della figura ſi avrà congiungendo li punti già trovati, come ſarà evidente per la coſtruzione, avendo in queſta tralaſciato diverſe linee per evitare la confuſione.

ESEMPIO III.

Se ſi cercaſſe come nella fig.16. la projezione dell' iconografia d'un dodecaedro regolare, avendo la projezione d'un lato dato, ſi dovrebbe ritrovare la figura originale per il probl.9., e di poi ſi opererebbe per mezzo del probl.7. Sarà facile al lettore di compire la detta projezione; oſſervando ſolamente, che l'iconografia originale ſi ha, deſcrivendo due decagoni concentrici, e paralleli, delli quali i lati omologi ſono li ſegmenti

d'una linea diviſa in media, ed eſtrema ragione: Queſt'iſteſſo caſo ſarà conſiderato, e ſciolto in appreſſo.

ESEMPIO IV.

Sia DC la linea evaneſcente (*fig.* 17.), O il punto di veduta, come nelli problemi precedenti, ſi troverà la projezione ANBMLP d'un' ottaedro regolare, eſſendo data la projezione d'uno delli lati AB. Prolungando AB ſino al ſuo punto evaneſcente C; il punto evaneſcente G delli lati AK, e NM, ſi trova per il problema 11., facendo l'angolo COG $\doteq$ 60°. Di poi (*per il Probl.* 10.) preſa una linea qualunque *bl* parallela a CD per interſezione, e facendo CD $=$ CO, e GH $=$ GO, ſi conducano DA, DB, che tagliano *bl* in *a*, *b*. Si tiri HA, che taglia *bl* in *a*, e preſa *al* $=$ *ab*, ſi conduca LH, che taglia AG in L, ſi avrà la projezione AL, eſſendo la ſua originale uguale ad *al*, e conſeguentemente all'originale di AB, eſſendo *al*, e *ab* uguali. Dividendo poi *ab*, e *al*, ognuna in tre parti uguali colli punti *e*, *f*, *i*, *k*, e conducendo *e*D, *f*D, *i*H, *k*H, ſi avranno li punti E, F, I, K (*per il Probl.* 3.). Tirate le linee FG, KH, EI, ſi avranno li punti M, N, P, che finiſcono la figura.

PROBL. XIV.

Dato il centro del quadro, e data la diſtanza colla linea evaneſcente del piano, ritrovare

vare il punto evaneſcente delle linee perpendicolari al medeſimo piano.

Sia AB (*fig.* 18.) la linea evaneſcente data, e ſia C il centro del quadro. Si conduca CA perpendicolare ad AB, alla quale ſi faccia parallela CO uguale alla diſtanza del quadro. Si tiri AO, alla quale ſi alzi la perpendicolare OD, che tagli CA in D, punto evaneſcente cercato.

DIM.

Immaginiamo il triangolo AOD rivolgerſi ſul piano della figura, talmente che CO arrivi ad eſſergli perpendicolare, eſſendo O il punto di veduta. Ciò ſuppoſto, il piano che paſſa per il punto O, e per la linea AB, ſarà il parallelo del piano originale; la linea OD ſarà perpendicolare al detto parallelo, e conſeguentemente ſarà la parallela delle linee perpendicolari al piano originale. Onde ſarà D il punto evaneſcente di queſte perpendicolari. (*Def.* 17.)

Cor. 1. Se la linea evaneſcente AB paſſa per il centro del quadro, cioè, ſe il piano originale è perpendicolare al quadro, il punto D ſarà infinitamente diſtante, la linea OD eſſendo parallela ad AD, e le projezioni delle linee perpendicolari al piano propoſto ſaranno tutte perpendicolari ad AB, poichè incontrano la linea AC perpendicolare ad AB in una diſtanza infinita; onde ſaranno parallele tra di loro. Ciò è evidente per un' altra ragione, eſſendo le linee originali parallele al quadro.

*Cor.*1. Se il piano originale è parallelo al quadro, la distanza CA diventerà infinita; onde OA sarà parallela a CA, e OD coinciderà con OC, cadendo il punto D nel centro del quadro C, conforme al Cor.2. del Teor.3.

*Cor.*3. E' evidente per la similitudine delli triangoli AOC, AOD, che la retta CD è terza proporzionale ad AC, e CO; come ancora AD è terza proporzionale ad AC, e AO.

*Cor.*4. OD è la distanza del punto evanescente D.

PROBL. XV.

Dato il centro, e data la distanza del quadro, ritrovare la linea evanescente delli piani perpendicolari a quelle linee, che hanno un punto evanescente dato; e di più ritrovare il centro, e la distanza della detta linea evanescente.

Sia C il centro del quadro (*fig.*18.), e D il punto evanescente dato. Si conduca DC, alla quale si alzi la perpendicolare CO uguale alla distanza del quadro. Si tiri DO, alla quale si faccia OA perpendicolare, che taglia DC in A. Sia condotta AB perpendicolare a DC, essa sarà la linea evanescente cercata, A il suo centro, (*Teor.*1.) e OA la sua distanza.

Questa costruzione è evidente dal problema precedente, ed è ancora manifesto, che se ne possono ricavare i medesimi Corollarj.

PRO-

PROBL. XVI.

Dato il centro colla distanza del quadro, tirare per un punto dato la linea evanescente d'un piano perpendicolare ad un altro piano, del quale la linea evanescente è data, e ritrovare la distanza, ed il centro di questa linea evanescente.

Sia AB (*fig.* 18.) la linea evanescente data, C il centro del quadro, E il punto dato. Si trovi il punto evanescente D delle linee perpendicolari alli piani originali di AB (*Probl.* 14.). Sia condotta DE, che sarà la linea evanescente cercata. Si conduca CF perpendicolare a DF, sarà F il centro della linea evanescente DE (*Teor.* 1.). Si faccia un triangolo rettangolo, del quale un lato sia CF, e l'altro sia la perpendicolare uguale alla distanza del quadro, l'ipotenusa sarà la distanza della linea evanescente DE (*Cor. Teor.* 1.)

DIM.

Poichè il piano del quale si cerca la linea evanescente è perpendicolare all'altro piano, la sua linea evanescente deve passare per il punto evanescente, D, delle linee perpendicolari a quest'altro piano, essendo alcune di queste linee nel piano cercato. Onde DE è la linea evanescente cercata. Le altre parti della costruzione sono evidenti.

Cor. 1.

Cor. 1. Se la linea FC è prolungata finchè tagli la linea evaneſcente data in B, ſarà B il punto evaneſcente delle linee perpendicolari al piano originale della linea evaneſcente DE. Imperocchè queſto punto evaneſcente è nella linea FC (*Probl.* 14.), ed è anche nella linea evaneſcente data (*per la dimoſtrazione*).

Cor. 2. Se le linee evaneſcenti AB, DE ſi incontrano in G, li punti B, D, G ſaranno li punti evaneſcenti delli tre lati dell'angolo ſolido del cubo, che ſono perpendicolari tra di loro. E conducendo DB, ſaranno BG, GD, DB le linee evaneſcenti delli tre piani, che formano queſto angolo ſolido.

Cor. 3. La diſtanza della linea evaneſcente DG è uguale alla linea FP, che è la perpendicolare alzata ſul diametro DG d'un cerchio, che paſſa per il punto P. Imperocchè ſe ſi concepiſce il piano del triangolo DOC alzato perpendicolarmente ſul piano DBC, l'ipotenuſa condotta dal punto O in F ſarà la diſtanza della linea evaneſcente, e queſta diſtanza ſarà perpendicolare in F, (*prop.* 12. *lib.* XI. *elem.*). Di più le tre linee DG, GB, DB eſſendo le linee evaneſcenti di tre piani perpendicolari l'uno all'altro, tirando dalli punti D, G, due linee concorrenti in O, ſarà l'angolo DOG, retto. Onde il punto O, ſarà nella circonferenza d'un cerchio deſcritto ſul diametro DG, e per conſeguenza la perpendicolare FP, al diametro DG, incontrando la circonferenza in P, ſarà uguale alla perpendi-

pendicolare FO, cioè alla distanza della linea evanescente.

PROBL. XVII.

Dato il centro, e data la distanza del quadro col punto evanescente della commune intersezione di due piani inclinati l'uno all'altro in un angolo dato; data di più la linea evanescente di uno delli detti piani, ritrovare la linea evanescente dell'altro.

Sia C, il centro del quadro (*fig.* 18.) BG, la linea evanescente di uno dei piani, B il punto evanescente della commune intersezione di ambedue, H l'angolo d'inclinazione. Si ritrovi la linea evanescente GD, delli piani perpendicolari alle linee, delle quali il punto evanescente è B (*probl.* 15.). Da questa linea evanescente, GD, sia tagliata in, G, la linea evanescente data. Si trovi in, GD, il punto evanescente E, delle linee che fanno l'angolo dato H, colle linee delle quali, G, è il punto evanescente (*probl.* 2.); cioè in BCF, perpendicolare a GFD, si prenda FP, uguale alla distanza della linea evanescente GD, trovata per il problema 15. Si conducano PG, PE che fanno l'angolo FPG uguale all'angolo H. Si conduca BE, che sarà la linea evanescente cercata.

DIM.

DIM.

Immaginiamo il triangolo GPE, rivolgerſi ſulla linea GE, talmente che il punto P, ſia nel punto di veduta perpendicolare al centro del quadro C. In queſto caſo li piani BPG, GPD, DPB, ſaranno li paralleli di tre piani originali, delli quali le linee evaneſcenti ſono BG, GD, DB, il piano che ha per linea evaneſcente DG, eſſendo perpendicolare alli due altri piani; poichè è perpendicolare alla loro commune interſezione, della quale è B, il punto evaneſcente. Onde li piani originali che hanno per linee evaneſcenti BG, BD, ſono inclinati l'uno all'altro nell'angolo EPG, cioè nell'angolo H; imperocchè l'inclinazione di due piani è ſempre miſurata in un piano perpendicolare alla loro commune interſezione. Onde BG, eſſendo la linea evaneſcente data, ſarà BE la linea evaneſcente cercata.

Cor. Il centro della linea evaneſcente BE, ſi ritrova, alzando dal punto C, una perpendicolare alla detta linea evaneſcente (*teor.* 1.) Di poi ſi ritrova la diſtanza della medeſima linea evaneſcente, come è ſtata trovata la diſtanza PF, nel probl. 16.

PROBL. XVIII.

Dato il centro, e data la diſtanza del quadro colla linea evaneſcente d'una delle facce d'un ſolido

lido propoſto qualunque. Data di più la projezione d'una linea in queſta iſteſſa faccia, ritrovare la projezione di tutta la figura.

Si ritrovi per mezzo della projezione data la projezione dell'iconografia della figura propoſta ſul piano della faccia, della quale è data la linea evaneſcente (*probl.* 13.) Di poi (per il *probl.* 16.) ſi ritrovi la linea evaneſcente del piano dell'ortografia, e ſi deſcriva la projezione dell'ortografia per mezzo delle linee già date nell'iconografia (*probl.* 13.). Finalmente colle interſezioni delle projezioni delle perpendicolari all'iconografia, e all'ortografia, ſi troveranno diverſi punti della projezione cercata.

In un'altra maniera. Eſſendo data la projezione d'una faccia della quale è data la linea evaneſcente, per mezzo della projezione della linea data ſi ritrovino le linee evaneſcenti delle facce contigue (*probl.* 17.), e ſi deſcrivano le loro projezioni per mezzo delle linee date nella projezione della prima faccia, e ſi continui nell'iſteſſa maniera finchè ſia terminata la projezione cercata.

Ho dato nelle propoſizioni precedenti un metodo generale per ridurre in perſpettiva qualunque figura propoſta, ma ſi poſſono in prattica adoperare alcuni ſpedienti più brevi ſecondo la natura delli problemi propoſti. Come ſi vedrà dalli eſempj ſeguenti.

ESEM-

ESEMPIO V.

La figura 19. rappresenta la projezione d'un dodecaedro regolare per mezzo dell'iconografia, e ortografia, essendo data la projezione AB, d'un lato parallelo al quadro; la retta FG, parallela ad AB, essendo la linea evanescente data della faccia ABCDE, F il centro della detta linea evanescente, H il centro del quadro, è Ho la distanza. Per evitare la confusione delle linee, sono state messe a parte l'iconografia, e l'ortografia ritrovate nella maniera seguente.

Sia condotta ad arbitrio, *ab*, parallela ad AB, e ad una distanza sufficiente, tirando IA, e IB, che tagliano *ab*, in *a*, e, *b*, la linea AB, è trasferita in *ab*, essendo I il punto evanescente delle linee perpendicolari alla faccia ABCDE della quale la linea evanescente è FG, ritrovata (*per il probl.* 14.) Il che essendo fatto, tutta l'iconografia si descrive sulla linea *ab*, (*per il probl.* 13.), come è descritta nel 3. esempio.

Quanto all' ortografia, la retta IHF, che passa per lo centro del quadro si sceglie come più opportuna per la sua linea evanescente, l'ortografia essendo più semplice in questo caso, e le projezioni delle linee, che sono perpendicolari al quadro essendo tutte perpendicolari ad FI (*cor.* 1. *probl.* 14.). Si conduca GA dal punto evanescente G della linea, *ae*, nell'iconografia, e si tiri *el*, che la taglia in E, si avrà la projezione AE. Di poi con-

conducendo A*a*, E*e*, tutte due parallele a GF, e che rappreſentano, come ſi è già detto, le perpendicolari all'ortografia, ſi tiri ad arbitrio *ae*, che paſſa per F, e che le taglia in *a*, *e*, ſi avrà la linea *ae*, colla quale ſi deſcrive tutta la projezione dell'ortografia (*per il probl.* 13.).

Eſſendo date le projezioni dell'iconografia, e dell' ortografia, ſi avrà un punto qualunque K della projezione cercata conducendo K*k* parallela ad FG, e tirando KI dalli punti corriſpondenti K, *k*, queſte due linee s'incontreranno nel punto cercato K.

Per l'intelligenza della projezione del cubo rappreſentata in queſta figura, baſta avviſare il lettore, che FG, FI, ſono due linee evaneſcenti del detto cubo, e che la terza è una linea, che paſſa per I, parallela ad FG.

Quanto alle ombre, che ſono ſuppoſte tramandate dal Sole ſul piano della faccia ABCDE del dodecaedro; l'ombra *u*V, d'una linea qualunque V*u*, ſi ritrova nella maniera ſeguente; G è il punto evaneſcente dato di tutti i raggi di luce, li quali partendo dal Sole ſono conſiderati come paralleli. Onde IS, che paſſa per lo punto evaneſcente I della linea V*u*, e per lo punto evaneſcente S delli raggi, è la linea evaneſcente del piano compoſto di tutti i raggi, che paſſano per la linea *uv*, e che formano l'ombra *vu*, e IS tagliando in S la linea evaneſcente FG, del piano ſopra il quale l'ombra è mandata, ſarà S, il punto evaneſcente dell'ombra *vu*, che è l'interſezione del piano

no dell'ombra, del quale la linea evaneſcente è Is, e del piano, ſopra il quale l'ombra è mandata, eſſendo *s*, il punto evaneſcente di queſta interſezione (*cor.2. teor.7.*) perciò condotta *vs*, e tirata VS, che la taglia in *u*, farà *vu*, l'ombra della linea *u*V.

Scolio. Nell'originale dell'ortografia li punti *e*, *m*, *s*, *p*, ſono gli angoli d'un quadrato. Le linee *on*, *al*, *qr*, eſſendo parallele ad *em*, e *oq*, *nr*, eſſendo parallele ad *ep*, e uguali ad *al*, ſaranno uguali le linee, *tk*, *on*, *qr*, e le linee *on*, *em*, *al*, ſaranno in continua proporzione geometrica del minore al maggiore ſegmento d'una linea diviſa in eſtrema, e media ragione. Queſto ſcolio ſi ricava facilmente dalla *prop.* 17. *del lib.* 13. delli elementi. Per evitare la confuſione della figura ſono ſtate tralaſciate alcune lineè citate nell'eſempio preſente.

ESEMPIO VI.

Nella figura 20. la linea evaneſcente della terra ſopra la quale ſi appoggia la fabbrica è AICKB, che paſſa per il centro del quadro C, la diſtanza del quadro eſſendo uguale a CO. BG, e AH, ſono le linee evaneſcenti dei piani retti, *abde*, DEN, e *abc*, DF*nm*; G, e H, eſſendo li punti evaneſcenti delle linee *be*, e *nm*, che toccano li più alti angoli dei due ſcalini, e perciò HG, BH ſono le linee evaneſcenti dei piani, che toccano il più alto, e il più baſſo orlo della ſcala.

Il

Il lato dato *br*, della baſe del tetraedro regolare è parallelo alla linea evaneſcente AB. Il punto *u*, che è la projezione del centro della baſe *brp*, e la poſizione del vertice *o*, ſi ritrovano conducendo, *pq*, parallela ad AB, e I*r*, che l'incontra in *q*, e tirando C*p*, e *bq*, che la taglia in *u*, la linea C*d*, perpendicolare ad AB, è la linea evaneſcente d'un piano perpendicolare alla baſe *brp*, che ſtà ſopra *up*, e paſſa per la linea *po*, della quale il punto evaneſcente è *l*, ritrovato (*Probl.* 11.) facendo CQ uguale alla diſtanza del quadro, e l'angolo, *d*QC, uguale all' originale di *upo*. La linea, VX, è la linea evaneſcente della faccia, *upr*, colla quale ſi deſcrive quella faccia, eſſendo data, *pr*, (*Probl.* 11.) come è ſtata deſcritta la faccia, *brp*, ſopra *br*. L'ottaedro regolare, e l'icoſaedro ſi deſcrivono per mezzo della loro iconografia, e ortografia, il quale metodo è ſufficientemente ſpiegato nell' eſempio precedente. Voglio ſolamente avviſare il lettore, che nell'ortografia ABCDEFGH, dell'icoſaedro, le linee CD, AF, GH, ſono uguali, come anche le linee AC, FD, BE, che AF, è a BE, come è il minore al maggiore ſegmento d' una linea diviſa in eſtrema, e media ragione, come ſi ricava dalla Prop. 16. del lib. 13. delli elementi.

La luce eſſendo ſuppoſta venire dal Sole, i raggi ſono paralleli al quadro, e alla linea AM, talmente che l'ombra, P, d'un punto qualunque, D, ſi trovi tirando per la ſua poſizione la

linea, NP, parallela ad AB, e DP, parallela ad AM, che la taglia in *l*. Quanto all' ombra del tetraedro, la quale si alza verso l'estremità dello scalino, avendo nella medesima maniera trovato il punto *s*, che sarebbe l' ombra del punto, *o*, sulla terra, se non vi fosse la scala, e conducendo *sb*, *sp*, si avranno le ombre *bo*, e *po*. Si faccia, che *su*, e *sp*, taglino l' orlo il più basso della scala in *y*, e, *x*, tirando allora, *xt*, perpendicolare ad AC, e che taglia, *os*, in *t*, si avrà l'ombra, *t*, del vertice, *o*, sull'estremità delli scalini, e condotta, *xt*, si avrà la parte dell'ombra di *op*, che cade sopra la detta estremità. Nell'istessa maniera si ritrova l'ombra di *ob*. Tutti li raggi essendo paralleli adAM, ed, A, essendo il punto evanescente di, DF, AM è la linea evanescente del piano formato dalli raggi, che passano per la linea DF, e BM, essendo la linea evanescente del muro, sopra il quale è tramandata l' ombra F*f*, M è il punto evanescente della commune intersezione di questi due piani, cioè dell'ombra, F*f*, della linea D*f*.

ESEMPIO VII.

Nella figura 21. la retta, ACB, che passa per il centro del quadro C, è la linea evanescente della terra; H, è il punto evanescente dell'orlo, EF, sopra il quale è appoggiato un trave, e le altre estremità si suppongono parallele a questa; D, è il punto evanescente dell'orlo GH, e DB,

e DB, che è perpendicolare ad AB, è la linea evaneſcente del piano EGH; P, Q, ſono i punti evaneſcenti dei lati MK, KN d'un tetraedro regolare, e conſeguentemente, PQ, è la linea evaneſcente del triangolo KNM, *l* è la luce, e, A, la ſua poſizione. Avendo BE*g*, cioè, l'interſezione del piano retto EGH col ſito, ſi avrà il punto, *g*, in cui la retta EGH, incontra la terra, e che è l'interſezione di HG colla terra. BE, taglia l'eſtremità, SR, della muraglia SR*b*, in R, e conſeguentemente R*b*, perpendicolare ad AB, è l'interſezione del muro col piano EGH, e perciò il punto, *b*, in cui s'incontrano R*b*, e GH, è l'interſezione della linea GHl colla muraglia. DL*l*, è la projezione d'una linea parallela all'originale di GH, eſſendo, D, il punto evaneſcente, e B*l*, è la ſua poſizione; onde, *l*, è la ſua interſezione colla terra. Le originali di, L*l*, e HG, eſſendo parallele, eſſe ſtanno nel medeſimo piano, cioè, nel piano, che forma l'ombra di HS. Ma, *lg*, rappreſenta l'interſezione di queſto piano colla terra; onde, *lg*, prolungata è una parte dell'ombra, e tirando, *l*G, che la taglia in, *g*, ſarà, *g*, l'ombra di, G, e *g*G, ſarà la parte dell'ombra di, HG, che arriva ſulla terra. Conducendo allora, *sb*, e tirando *l*H, che la taglia in *b*, ſarà, *bs*, l'altra parte dell'ombra verſo il muro.

Condotte, *gp*, e DT, ambedue parallele ad AB, ſaranno, D*g*, *gp* le projezioni di due linee in un piano del quale, DT, è la linea evaneſcen-

te, e, T, è il punto evaneſcente della commune interſezione di queſto piano col piano del triangolo KMN (*cor.*2. *teor.*7.), eſſendo, PQT, la ſua linea evaneſcente. Onde tirando T*p*, che taglia, *g*D, in V, ſarà V l'interſezione della linea, *g*GHD, col piano di queſto triangolo KMN. Allora, *lg*, tagliando MK in, *r*, condotta, *r*tV, ſarà, *rt*, la parte dell'ombra di GH, che cade ſopra il triangolo KMN.

Avendo ſpiegato la maniera di ritrovare l'ombra di, GH, il reſtante non ha biſogno di altra ſpiegazione.

ESEMPIO VIII.

Nella fig.22. C, è il centro del quadro, CH, la linea evaneſcente del ſito, e della ſuperficie dell'acqua, l'ombra della quale produce le rifleſſioni della figura; S è il punto evaneſcente dei raggi di luce, i quali ſono ſuppoſti venire dal Sole.

L'ombra della perpendicolare, BD, ſi trova in queſta maniera. Condotta, SA, perpendicolare a, CA, ſi ha il punto evaneſcente, A, dell'ombra ſul ſito BF. Di poi ſi prenda un punto qualunque, E, nella circonferenza della baſe del cilindro, la quale è parallela al quadro, eſſendo l'aſſe perpendicolare al quadro, ed eſſendo C, per conſeguenza il punto evaneſcente. Si trovi la poſizione del detto punto E ſul ſito, *e*; ſi conduca, CE, e ſi tiri, C*c*, che taglia BA in *f*, allora

lora condotta *f*P perpendicolare a CA, e che taglia CE in, P, ſi avrà un punto *p* dell'ombra ſulla ſuperficie del cilindro. Nella medeſima maniera ſi avranno tutti li punti dell'ombra. Per dimoſtrare queſta coſtruzione, baſta che il lettore conſideri, che l'originale di *e*EPF*e*, è un piano retto, che taglia il cilindro in, EP, e, *f*P, è l'ombra di BD sù queſto piano. Onde, P, è il punto ove cade queſt'ombra ſulla ſuperficie del cilindro. Si trova in queſta maniera un punto qualunque, Q, dell'ombra della circonferenza del cilindro interiore ſulla ſua ſuperficie. Si conduca, CS, alla quale ſi tiri ad arbitrio la parallela, GH, che taglia queſta circonferenza in G, e H. Tirata, GS, e condotta CH, che la taglia in, Q, ſarà, Q, il punto cercato; imperocchè, C, eſſendo il punto evaneſcente dell'aſſe del cilindro e di CH, HQ è nella ſuperficie del cilindro, e GH, eſſendo parallela a, CS, è la projezione d'una linea parallela al quadro, in un piano del quale, CS, è la linea evaneſcente, e la ſua originale eſſendo parallela al quadro è nella baſe d'un cilindro, che è parallelo al quadro. Onde le originali di, HS, HC, e GS, eſſendo nel medeſimo piano, ſarà Q, la projezione del punto in cui li raggi di luce dei quali la projezione è GS, tagliano la ſuperficie del cilindro, cioè Q è la projezione dell'ombra dell'originale del punto G, nella circonferenza della baſe ſulla ſuperficie interiore del cilindro.

Il punto, *b*, essendo la posizione del punto, D, sulla superficie dell' acqua, si trova la riflessione, *d*, del punto, D, continuando la perpendicolare, D*b*, finchè, *bd*, sia uguale a *b*D; ciò è evidente per le leggi della riflessione, imperocchè la riflessione fa comparire l'oggetto nella parte opposta del piano riflettente nella stessa maniera, che l'oggetto stà dall'altra parte del medesimo piano. Perciò prendendo in AS, la retta A*s*, uguale ad AS, si trova un punto qualunque *q*, nell' ombra sulla superficie del cilindro interiore nella medesima maniera, che si ritrova, Q, nella figura reale, adoprando il punto, *s*, in vece di S.

L'ombra del cilindro sulla superficie del cono si ritrova nell' istesso modo come l' ombra della linea, BD, sulla superficie del cilindro.

Scol. Si deve osservare, che nelli esempj precedenti io ho considerato le ombre solamente come projezioni di figure date sopra una data superficie per mezzo di punti luminosi dati. Imperocchè considero il corpo luminoso come un punto, per sfuggire le difficoltà alle quali sarebbe soggetta la descrizione delle ombre, se si mettesse in considerazione la grandezza del corpo luminoso, ed essendo sufficiente per la prattica della perspettiva di considerare il centro del corpo luminoso. Avendo trovato in questa suppozizione il contorno dell' ombra, si potrà descrivere la penombra, più coll'ajuto di esattissime osservazioni, che colli precetti dell'arte, essendo difficile,

ficile di portare ogni cosa ad una esattissima costruzione matematica, almeno quanto sarebbe conveniente per la prattica. Ma un' artista ben' istruito della perspettiva potrà supplire sufficientemente alla teoria nelli casi, che richiedono maggiore esattezza. Del resto si vede, che la dottrina delle ombre considerate, come ho detto, si riduce alli principj communi della perspettiva.

ESEMPIO IX.

Nella figura 23. essendo tutto facilmente inteso da quel che è stato già spiegato, io dimostrerò solamente il modo di ritrovare in uno specchio la riflessione d'un quadro immmaginato sul cavalletto del pittore. A, è il centro del quadro, AB, la linea evanescente del sito, la distanza del quadro essendo uguale ad AB. AC è la linea evanescente del quadro sul cavalletto, e CD la linea evanescente dello specchio. Per lo punto, *a*, in cui l' orlo, *ba*, del piede della tavola incontra la superficie della medesima, si tiri *ae*, e per lo punto, *b*, si tiri, *bd*, ambedue parallele ad AB, la retta, *bd*, incontrerà l' intersezione, *cd*, della superficie del quadro col sito in, *d*, e conducendo *de* parallela ad AC, e che taglia, *ae*, in, *e*, condotta, *Ae*, si avrà la projezione *Ae*, della commune intersezione della superficie della tavola, e del quadro; imperocchè, *ae*, essendo parallela ad, AB, essa è la projezione d'una linea

nella ſuperficie della tavola, parallela al quadro, e per l'iſteſſa ragione, *bd*, è la projezione d'una linea ſopra il ſito, e, *de*, è la projezione d'una linea nel piano del quadro, e queſte due linee ſono parallele al quadro, ſiccome ancora, *ab*, è la projezione d'una linea parallela al quadro. Onde, *abde*, è la projezione d'un trapezio parallelo al quadro, l'angolo del quale, *e*, è la commune interſezione della ſuperficie ſulla tavola, e del quadro ſul cavalletto. Ma, A, eſſendo la commune interſezione delle linee evaneſcenti di queſti due piani, è il punto evaneſcente della loro commune interſezione, e perciò, *e*A, è la projezione di queſta interſezione (*cor.*2. *teor.*7.). Per l'iſteſſa ragione, eſſendo, *o*, la projezione d'un punto, in cui la ſuperficie del vetro tocca la tavola, ed, E, eſſendo la commune interſezione delle linee evaneſcenti, AB, e, CD, ſarà, O*e*, la projezione della commune interſezione della ſuperficie della tavola, e della ſuperficie del vetro. Onde il punto, *f*, interſezione di, *o*E, e, *e*A, è la projezione del punto nel quale s'incontrano queſti tre piani, cioè, della ſuperficie della tavola, del vetro, e del quadro. Onde tirando, *f*C, eſſa ſarà la projezione della commune interſezione del quadro, e dello ſpecchio.

Avendo trovato il punto evaneſcente, P, delle linee perpendicolari al piano dello ſpecchio del quale la linea evaneſcente è CD (*Probl.*14.), e conducendo, PA, per il punto evaneſcente, A, della

della linea, GH, e che taglia CD in D, ſarà D, il punto evaneſcente della poſizione di GH ſopra il piano del vetro. Onde GH tagliando, C*f*, in, *i*, ſarà, D*i*, la projezione di queſta poſizione. Di più tirando GP, che taglia, D*i*, in *k*, ſarà, *k*, la poſizione del punto, G, ſul vetro. Perciò ſopra, GP, ſi prenda, *kg*, per rappreſentare una linea uguale a quella, che viene rappreſentata per, G*k*, (*Probl.*3.) ſarà, *g*, la projezione della rifleſſione di, G, e, G*i*, è la rifleſſione di G*i*, e conducendo, PH, che taglia, *gi*, in, *b*, ſarà, *gb*, la rifleſſione di GH. Nella medeſima maniera ſi troveranno qualunque altre linee nella rifleſſione.

Può ancora deſcriverſi la rifleſſione del quadro per mezzo della ſua linea evaneſcente nell' iſteſſa maniera, che è ſtata deſcritta la projezione del quadro medeſimo; imperocchè in PAD preſo, *a*D, per rappreſentare una linea uguale alla linea rappreſentata per, AD, ſarà, *d*, il punto evaneſcente della linea rifleſſa, *gb*, e, C*a*, è la linea evaneſcente del quadro rifleſſo.

Fine della Prima Parte.

PAR-

PARTE SECONDA

Della maniera di ritrovare le figure originali dalle loro projezioni date, e della ſituazione neceſſaria per conſiderare le projezioni particolari.

PROBL. XVIII.

DAta la projezione d'una linea diviſa, e il ſuo punto evaneſcente, ritrovare la proporzione delle parti dell'originale.

Sia AB (*fig.*7.) la projezione data, diviſa in C, ed V il ſuo punto evaneſcente. Si conduca ad arbitrio VO, alla quale ſi faccia, *ab*, parallela. Da un punto qualunque O, nella linea OV, ſi tirino le linee OA, OB, OC, che tagliano, *ab*, in *a*, *b*, *c*. Sarà l'originale di AC, all'originale di, CB, come *ac*, è a *cb*.

Cor. $ac : bc = AC \times BV : BC \times AV$.

PROBL. XIX.

Eſſendo data la projezione d'una linea diviſa in due parti, e la proporzione dell'originale, ritrovare il ſuo punto evaneſcente.

Sia, AB, la projezione data diviſa in C. (*fig.*7.) per lo punto, C, ſi conduca ad arbitrio,

trio, aCb, ed in essa si prenda aC, a, Cb, come l'originale di AC è all'originale di CB, e si conducano, Aa, Bb, che s'incontrano in o. Si tiri, OV, parallela ad, ab, che taglia AB in V, che sarà il punto evanescente cercato.

Cor. $BV : BA = Ca \times CB : Cb \times AC - Ca \times CB$. Questi due problemi colli loro corollari sono evidenti per il problema 3., e suoi corollari.

PROBL. XX.

Essendo data la projezione d'un triangolo colla sua linea evanescente, il suo centro, e la distanza, ritrovare la specie del triangolo originale.

Sia, *abc*, (*fig.*10.) la projezione data, HG, la sua linea evanescente, S, il suo centro, e SO, perpendicolare ad, HG, ed uguale alla sua distanza. Avendo prolungato li lati della projezione data, finchè taglino la linea evanescente nelli loro punti evanescenti G, H, I, si conducano GO, GH, e GI, li originali delli angoli *bac*, *ab*H, *acb*, saranno uguali a GOI, IOH, GOH rispettivamnete (*Probl.*2.). Onde è data la specie del triangolo originale.

PROBL. XXI.

Essendo data la projezione d'un triangolo d'una specie data, e la sua linea evanescente, ritro-

trovare il centro, e la distanza di questa linea evanescente.

Sia ABC (*fig.* 12.) la projezione data, e FD la sua linea evanescente. Siano prolungati i lati della projezione, finchè taglino la linea evanescente nelli loro punti evanescenti, D, E, F. Si divida DE, EF, in G, e H, e si conduca GI, e HK perperpendicolare ad FD, facendo GI a GE come il raggio è alla tangente dell'angolo rappresentato per BAC. Si faccia di più KH a EH, come il raggio è alla tangente dell'angolo rappresentato per BCA, talmente che, EIG, e FKH siano uguali alli detti angoli. Dalli centri I, K, colli raggi IE, KE, si descrivano due cerchi, che si tagliano in O, e si conduca, OS, che taglia, FD, ad angoli retti in S, sarà, S, il centro; e, SO, la distanza cercata.

DIM.

Si supponga, G, il centro, e SO, la distanza della linea evanescente, FD; li originali delli angoli BAC, BCA saranno uguali a COE, e EOF (*Probl.* 2.). Ma per la natura del cerchio, DOE, e FOE, sono uguali a GIE, e HKE, li quali (*per constr.*) sono uguali alli angoli rappresentati per BAC, e BCA. Onde, S, è il cento, e SO, la distanza cercata.

PRO-

PROBL. XXII.

Essendo data la projezione d'un trapezio di una spezie data, ritrovare la sua linea evanescente, il centro, e la distanza.

Sia, *abcd*, (*fig.* 12.) la projezione data, si tirino le diagonali, *ac*, *bd*, che s'incontrano in, *e*; e per le projezioni delle originali di *ae*, *ac*, e, *be*, *ed*, si trovino li punti evanescenti E, F, delle linee *ac*, *bd*, (*Probl.* 19.). Si conduca, EF, che sarà la linea evanescente cercata. Di più per la spezie data dell'originale del triangolo, *abc*. Si trovi il centro, S, e la distanza, SO, (*Probl.* 21.)

PROBL. XXI.

Essendo data la projezione d'un parallelo pipedo rettangolo ritrovare il centro, e la distanza del quadro, e la spezie della figura originale.

Sia, ABCDEFG, (*fig.* 24.) la projezione data, siano prolungate le projezioni delli lati paralleli finchè s'incontrino nelli loro punti evanescenti H, I, K, e si conducano HI, HK, IK, le quali saranno le linee evanescenti delle diverse facce della figura cercata, che contengono un'angolo solido retto. Si conduca, K*d*, perpendicolare ad HI, e HM perpendicolare a KI, che l'incontra in S, sarà, S, il centro del quadro

(*cor.*

za giudicherebbe la figura, AD, eſſere un parallelopipedo rettangolo, benchè la ſpecie della figura foſſe molto diverſa ſecondo la diverſa ſituazione dell'occhio. Laſcio alli artiſti a conſiderare ſe queſto corollario potrebbe eſſere di qualche uſo nel dipingere le ſcene delli Teatri. Imperocchè ſe ſupponiamo, *l*, K, eſſere li due punti, che ſogliono chiamarſi nelli volgari libri di perſpettiva: *punti di diſtanza*: e ſe li edifizj ſono talmente diſegnati, che li loro lati ſiano terminati a queſti punti, come ſi vede nella figura preſente, eſſi comparirebbero rettangoli alli occhi delli ſpettatori, eſſendo le loggie nella ſemicirconferenza del cerchio.

Fine della Perſpettiva.

APPENDICE.

NUM. I.

Metodo per rappreſentare le figure ſopra una ſuperficie qualunque irregolare.

DA tutto quel che ſi è detto in queſt' Opera per ſpiegare i principj della perſpettiva, e ſpecialmente in fine delle definizioni, è evidente, che il ſecondo teorema può intenderſi di qualunque ſuperficie o concava, o conveſſa, o in qualunque modo irregolare. Sia la ſuperficie del quadro ABC (*fig.3.*) d'una forma qualunque, la projezione, *fg*, della linea originale, FG, ſarà ſempre l'interſezione del quadro col piano del triangolo FGO; ma la parallela OV, è in queſto piano (*teor.3.*); onde ſe la fiammella d'una candela è talmente diretta, che eſſa mandi l'ombra di OV ſopra un punto qualunque, B, della linea FG, l'iſteſſa ombra coprirà tutta la linea FG, e nell'iſteſſo tempo la linea V*fg*B ſopra il quadro, la quale è la projezione di FG; tutti i raggi, che vengono dalla candela, e che paſſano per la linea, OV, facendo in queſto caſo un piano, che coincide col piano del triangolo OFG. Il medeſimo accaderebbe, ſe alcuno collocaſſe talmente l'occhio, che un punto qualunque della linea FG, li ſembraſſe coperto dalla

dalla linea OV, in queſto caſo OV comparireb. be coprire tutta la projezione *Vfg*. Nell'iſteſsa maniera ſe una candela è talmente collocata, che l'ombra di OV paſſi per un punto qualunque della projezione *Vg*, la ſteſſa ombra coinciderà con tutta la projezione; e ſe alcuno ſi ponga talmente, che OV ſembri coprire un punto qualunque della detta projezione, eſsa comparirà coperta tutta. Onde io credo che poſſa eſſere utiliſſimo il metodo ſeguente per diſegnare le projezioni di ogni ſorta di figure ſopra una ſuperficie qualunque, per eſempio, ſopra le muraglie; le cuppole delle Chieſe, li ſolaj delli Palazzi, le ſcene delli teatri &c.

Si ſcelga qualche linea principale nel diſegno da farſi, ed avendo con qualche metodo ritrovato le projezioni delli ſuoi punti eſtremi, ſi paſſi per lo punto di veduta un filo parallelo alla linea originale, ſi mandi l'ombra del medeſimo filo ſulli punti già trovati, queſt'ombra ſegnata col lapis ſarà la projezione di queſta linea principale; ovvero ſe pare più a propoſito in qualche caſo particolare, ſi ponga l'occhio in tale ſito, che il filo parallelo ſembri coprire li due punti già ſegnati, e ſi adoperi qualche aſſiſtente per ſegnare la projezione cercata. Per eſempio ſia *pb*, (*fig.*20.) queſta projezione principale: per ritrovare la projezione *o*, di qualche altro punto della figura da diſegnarſi, ſia immaginato queſto punto eſſere la ſommità d'un triangolo, del quale la baſe è l'originale della projezione

ne già trovata, e ſia collocato il filo, che deve paſſare per lo punto di veduta in una ſituazione parallela all'originale di uno dei lati di queſto triangolo, e ſi mandi la ſua ombra ſopra l'eſtremità della projezione data, e ſi ſegni come prima: ſi avrà la projezione indefinita di queſto lato *bo*. Si faccia l'iſteſſo per un'altro lato, e coll'interſezione di queſte projezioni, per eſempio, *bo*, *po*, avremo la projezione del punto cercato. Queſto metodo può ſervire per ritrovare la projezione di una figura qualunque, e può eſſere utiliſſimo alli pratici di perſpettiva.

NUM.

NUM. II.

Della miſtura delli colori ſecondo li principj del Cavalier Iſaac Nevvton.

NElli colori ſi devono conſiderare due coſe, il colore propriamente detto, e la forza della luce, e dell'ombra. Imperocchè ſiccome li diverſi colori, per eſempio, il roſſo, ed il verde poſſono avere la medeſima forza di colore, così ancora due oggetti, dei quali uno è molto più oſcuro dell'altro, poſſono avere l'iſteſſo colore, per eſempio, turchino vivo, e turchino oſcuro.

Quanto al colore propriamente detto, ſi devono anche conſiderare due coſe, 1. la ſpezie di colore, 2. la perfezione o l'imperfezione del colore nella medeſima ſpezie. Li colori differiſcono di ſpezie, come il turchino ed il roſſo; e li colori dell'iſteſſa ſpezie differiſcono in grado di perfezione, come il roſſo d'un prato di papaveri è molto più perfetto, che un roſſo di mattoni. Queſta qualità di perfezione e d'imperfezione nelli colori è eſpreſſa dalli Pittori colli termini di *puro*, o *ſemplice*, e *rotto*, le quali denominazioni ſono preſe dalla pratica ſolita nel fare li colori imperfetti colla loro miſtura, la quale viene chiamata, *rompere* il colore. Quanto a queſta qualità delli colori, il Signor Iſaac Nevvton nella ſua eccellente opera

di ottica dimoſtra, che ogni raggio di luce ha il ſuo colore proprio, che egli porta ſempre ſeco, e non perde mai, in qualunque maniera la luce venga rifleſſa, o rifratta. Queſti colori naturali delli raggi ſono i colori ſemplici, e il loro ordine naturale, come eſſi compariſcono ſeparati per la refrazione del priſma, è il ſeguente, roſso, arancio, giallo, verde, turchino, indico, pavonazzo. Tutti li colori imperfetti o rotti ſi fanno colla compoſizione, e meſcolanza di queſti ſemplici colori, per eſempio, li raggi gialli meſcolati colli turchini fanno il verde, ma non così perfetto, come ſono li raggi naturali verdi. Similmente li raggi roſſi, e gialli compongono un colore arancio, ma non così perfetto, come è l'arancio ſemplice. Con una giuſta proporzione di tutti li raggi naturali affieme ſi produce la bianchezza, la quale è indifferente a qualunque colore ſemplice, e non può dirſi inclinare più a un colore, che ad un altro. Per bianco intendo un colore tra il bianco il più vivo, ed il nero il più oſcuro; imperocchè non avendo conſiderato fin'adeſſo li gradi di luce, e d'ombra: tutti li colori, dal nero fino al bianco, devono conſiderarſi come dell'iſteſſo colore. Da queſta oſſervazione della natura del bianco, pare, che li colori rotti ſono medii tra li colori ſemplici, ed il bianco, e che più il colore è rotto, più è vicino al bianco; e che più il colore è lontano dal bianco, più è ſemplice.

Avendo ſpiegato la natura delli colori, e l'effet-

l'effetto della loro meſcolanza, per ritrovare eſattamente il colore prodotto dalla miſtura d'un numero di colori qualunque dati, il Signore Iſaac Nevvton diſpone li colori nella maniera ſeguente. Sia il cerchio ADFA (*fig.*25.) la circonferenza del quale ſia diviſa in ſette parti AB, BC, CD, DE, EF, FG, GA, nella medeſima proporzione che hanno fra di loro le frazioni $\frac{1}{8}\ \frac{3}{40}\ \frac{2}{15}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{9}\ \frac{2}{9}$. Tra A e B ſi diſpongano tutti i generi di roſſo, da B in C tutti i generi d'arancio, da C in D tutti i generi di verde, da E in F tutti i generi di turchino, da F in G tutti i generi d'indico, e da G in A tutti i generi di pavonazzo. Avendo così diſpoſti li colori ſemplici, O, ſarà il luogo del bianco, e tra il centro e la circonferenza ſono i luoghi degli altri colori rotti; li colori che ſono più vicini al centro eſſendo li più compoſti, e quelli che ne ſono più lontani eſſendo li meno compoſti. Nella linea O1, tutti li colori in 1, 2, 3, 4, ſono dell'iſteſſa ſpecie, cioè il verde inclinante verſo il turchino, ma il colore in 1, è il colore ſemplice naturale, il colore in 2, è un poco più compoſto o rotto, il colore in 3, più compoſto, il colore in 4, è ancora più rotto.

Eſſendo li colori diſpoſti in queſta maniera, per conoſcere il colore che riſulta dalla miſtura di colori qualunque dati, ſi deve trovare il centro di gravità delli luoghi delli colori dati,

ti, e ſi avrà il carattere del colore compoſto. Per eſempio, ſe io voglio conoſcere quale colore riſulterebbe dalla meſcolanza di due parti di giallo in P, con tre parti di turchino ſemplice in Q, ſi deve trovare il centro di gravità 3, delli punti P, Q, cioè ſi conduce PQ, e ſi divide in 5. parti, che è la ſomma di 3, 2., ſi prende il punto 3, cioè trè parti verſo P. imperocchè vi ſono trè parti di turchino. e ſi prendono due parti verſo Q, poichè vi ſono due parti di colore in P. Conducendo di poi la retta, O3, che taglia la circonferenza in 1., che è tra D e E, ma più vicino di E, ſi vede che la meſcolanza produce il verde inclinante al turchino, ma perchè il punto 3., è quaſi mezzo trà il centro, e la circonferenza, il colore è poco rotto. Queſta dottrina diventerà più chiara con un'altro eſempio. Se io voglio conoſcere il colore compoſto dalla meſcolanza di due parti di giallo in P, tre parti di turchino in Q, e cinque parti di roſſo in R, ſi trova primieramente il luogo 3, della miſtura di giallo e di turchino come di ſopra. Condotta la retta 3R; eſſendo cinque parti di colore in 3, e cinque parti di colore in R, eſſa ſi divide in dieci parti, e ſi prende il punto *r*, cinque parti lontano da R, in queſta maniera il punto *r*, è il centro di gravità delli trè colori in P, Q, R, e ſi ha conſeguentemente il luogo della meſcolanza, tirando O*r*, che taglia la circonferenza in S. Onde il colore ſarà arancio

cio inclinante verſo il roſſo, ed eſſendo *r*, più vicino al centro che alla circonferenza, il colore ſarà più rotto. Si farà l'iſteſſo per gli altri caſi, ſarebbe facile il determinare eſattamente la diſtanza dal centro, ma in tali coſe baſta la coſtruzione.

Dal metodo precedente ſi capiſce il modo di ſciogliere il problema inverſo, cioè, eſſendo dato il luogo d'un colore compoſto, ritrovare li colori da meſcolare per produrre il colore compoſto dato. Sia dato il colore in 3, per il punto 3, ſi conduce una retta qualunque P3Q; il colore compoſto può eſſere prodotto dalla meſcolanza delli colori in P, Q, prendendo la proporzione delli colori eſpreſſa per le linee 3P, 3Q, cioè prendendo del colore P in ragione di 3Q, e del colore Q in ragione di 3P. Dipoi conducendo O3; che paſſa per li punti 1, 2, 4, l'iſteſſo colore può eſſere prodotto meſcolando li colori in 2, e 4, in proporzione delle linee 4. 3. e 2. 3. overo l'iſteſſo colore può eſſere prodotto rompendo il colore ſemplice in 1. col bianco in O, nella proporzione delle linee 3, 1. e 3.O. L'iſteſſo s'intende per gli altri caſi. Le proporzioni delli colori ora aſſegnate per la meſcolanza delli medeſimi, ſi riferiſcono ſolamente alla quantità delli raggi di luce, e non alli materiali delli quali ſono compoſti li colori artificiali. Onde ſe diverſi colori artificiali ſiano meſcolati ſecondo le regole già ſpiegate, e ſe alcuni di loro ſono più oſcuri, ſi

dovrà adoperare una proporzione maggiore di materiali più oſcuri per produrre il colore propoſto: imperocchè riflettono meno raggi di luce a proporzione della loro quantità, e ſi deve al contrario adoperare una minore proporzione di materiali più vivi, imperocchè riflettono una maggiore quantità di luce.

Se foſſe perfettamente conoſciuta la natura delli materiali adoperati nella pittura, talmente che ſi ſapeſſe eſattamente la ſpezie del colore, la ſua perfezione, il grado di luce e d'ombra, che ha ogni materiale proporzionatamente alla ſua quantità, ſi potrebbe colle regole precedenti produrre eſattamente un colore qualunque propoſto, meſcolando li diverſi materiali in una giuſta proporzione. Ma benchè queſte particolarità non poſſano eſſere ſufficientemente conoſciute per farne uſo, oltre il tedio, e la difficoltà che ſi incontrarebbero nel miſurare li colori ſecondo la loro eſatta proporzione, nulladimeno queſti principj poſſono eſſere di grandiſſimo vantaggio nella pittura. Si ſupponga, che un Pittore habbia ſulla tavoletta diverſi colori in *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, per eſempio in *a*, del minio, in *b*, dell'orpimento, in *c*, colore di garofolo, in *d*, dell'acqua di mare, in *e*, dell'azurro, e che il Pittorre debba fare del verde rotto del quale il luogo foſſe in *x*. Conſiderando intorno al punto *x*, ſi vede che il detto punto non è molto lontano dalla linea che paſſa per *c*, *d*. Onde ſi conchiude che meſco-

meſcolando li colori *c*, *d*, ſi otterrà a un dipreſſo il colore cercato. Ma perchè *x*, è più vicino del centro O, che la linea *cd*, avendo portato la tinta il più vicino che ſia poſſibile della tinta cercata, per eſempio in *z*. Si riguarda qualche colore oppoſto a *z*, traverſando *x*, *z*, col quale ſi poſſa rompere la tinta, e ſi trova eſſere *a*, il più vicino. Onde miſchiando del colore *a*, ſi ha la compoſizione cercata. Se il colore *a* portaſſe la tinta troppo oltre verſo la linea OD, ſi mette un poco più del colore *d*, per avere il giuſto luogo. Ovvero avendo la tinta *z*, ſi potrebbe rompere col bianco del quale il luogo è il centro O; ovvero ancora mettendo una proporzione maggiore del colore *d*, in vece di *a*, ſi potrebbe dopo rompere la tinta col colore *b*: Nell'iſteſſa maniera colla ſola conſiderazione di queſto eſempio, ſi potrà fare una tinta qualunque colli colori dati. Si vede che il roſſo ed il giallo producono un'arancio rotto, il quale diventerà ancora più rotto aggiungendo il turchino, o l'indico, o il pavonazzo, che devono prenderſi l'uno, o l'altro, quando ſi vuole avere una tinta che inclina più al giallo o al roſſo, il turchino portandolo verſo il giallo e rompendolo molto, il pavonazzo portandolo verſo il roſſo, e rompendolo meno.

Da queſti principj ſi capiſce perchè li materiali delli colori più vivi, e più ſemplici ſono di maggior prezzo. Li colori più ſemplici ſono

più

più ſtimabili, perchè non poſſono eſſere prodotti dalla miſtura, poichè la miſtura rompe ſempre li colori. Supponiamo *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, i colori dati, allora condotte delle linee per unire li punti, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, tutte le tinte che poſſono eſſere prodotte da queſti colori avranno il loro luogo nell'area del poligono *abcde*. Che li colori più vivi ſiano più ſtimabili delli oſcuri la raggione sì è, perchè il nero non rompe li colori come fa il bianco, talmente che ſia più facile di fare una tinta chiara oſcura, con colori vivi e neri, che di fare una luce viva con colori oſcuri, e col bianco. Imperocchè è ſtato dimoſtrato che il bianco rompe molto li colori, ma il nero non eſſendo che una privazione di luce, ſolamente li oſcura, abbenchè per cauſa dell'imperfezione delli materiali che ſono in uſo, il nero può ancora rompere un poco li colori, non eſſendovi materiale alcuno perfettamente nero, come ſi può vedere nelli più belli neri, che hanno ſempre una meſcolanza di luce, e d'ombra. Vi ſarebbero molte eccezzioni da farſi nell'applicazione di queſti principii alla pratica, per cagione delle qualità particolari delli materiali che formano li colori. Se tutti i colori foſſero come polveri ſecche le quali non produceſſero effetto alcuno l'una ſopra l'altra colla loro meſcolanza, e fermentazione, queſte oſſervazioni ſarebbero eſattiſſime nel meſcolarli. Ma alcuni colori ſono di tale natura, che eſſi producono nella

nella meſcolanza un' effetto molto diverſo da quello che ſi aſpettava, talmente che ſia poſſibile che alcuni materiali oſcuri dilavati col bianco, producano colori più chiari, e meno compoſti di quel che farebbero eſſendo ſemplici. Ma tutte queſte rifleſſioni meritano di eſſere conſiderate dalli pratici dell' arte.

Benchè tutta la teoria precedente dipenda dalle ſperienze di Nevvton ſopra li colori, nulladimeno non mi tratterò a riferirle eſſendo deſcritte in tutti i libri di buona fiſica, baſterà di ſpiegare i limiti delli colori nell'imagine Solare. Il Nevvton avendo adoperato un priſma del quale l'angolo verticale era a un dipreſſo di gradi 63. mandava l'imagine del Sole alla diſtanza di 22. piedi, ed oſſervava la lunghezza dell'Imagine di dita $13.\frac{1}{4}$, e la lunghezza di 2: $\frac{5}{8}$. Onde li centri delli cerchj eſteriori che terminavano la lunghezza dell'imagine erano diſtanti tra di loro di $20.\frac{5}{8}$ dita. Sia queſta imagine APCDVB (*fig.* 26.) nella quale la diſtanza delli centri ſia XY. Si divida XY in due parti uguali nel punto H, e in tre parti nelli punti G, I. Di più ſi divida XI in tre parti in E, e ſi prenda KY, la quinta parte, e MY l'ottava di tutta XY. Saranno li ſpazj $MY = \frac{1}{8}$, $KM = \frac{3}{40}$, $IK = \frac{2}{15}$, $HI = \frac{1}{6}$, $GH = \frac{1}{6}$, $EG = \frac{1}{9}$, $XE = \frac{2}{9}$.

L'ima-

L'imagine diviſa in queſta maniera eſſendo preſentata al Sole nello ſperimento del Nevvton, li colori ſeparati occupavano li predetti ſpazj coll' ordine ſeguente, cioè, il roſſo in MY, l'arancio in KM, e poi giallo, verde, turchino, indico, pavonazzo nelli ſpazj ſeguenti. Onde ſi vede la ragione della mentovata diviſione del cerchio in $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{40}$ &c.

Nella predetta coſtruzione per la compoſizione delli colori, ſi deve prendere, ſecondo il metodo del Nevvton, il centro di gravità delle parti delli diverſi colori dati, la ragione ſi è, che ſi poſſono conſiderare le azioni delli colori ſull' organo della viſta come forze, le quali ſono in ragione delle maſſe, eſſendo uguali le velocità.

Prima di finire queſto articolo rimane a ſpiegare una certa analogìa accennata dal Nevvton tra li colori, e li tuoni della muſica. Si prolunghi XY in Z, e ſi faccia $YZ = YX = 1$. Poichè $MY = 1$., ſarà $MZ = \frac{1}{8} + 1. = \frac{9}{8}$, Di più $KM = \frac{1}{5}$, onde ſarà $KZ = \frac{1}{5} + 1. = \frac{6}{5}$ e continuando nell'iſteſſa maniera, ſi troveranno per ordine le altre diſtanze $IZ = \frac{4}{3}$ $HZ = \frac{3}{2}$ $GZ = \frac{5}{3}$, $FZ = \frac{16}{9}$, $XZ = 2$. Se ſi conſidera la linea XY, come una corda muſicale alla quale

le ſi debbano riferire le diviſioni MZ, KZ &c., dividendo li numeri 1. $\frac{9}{8}$, $\frac{6}{5}$ &c. per 2. Si avranno le frazioni $\frac{1}{2}$ $\frac{9}{16}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{8}{9}$ 1.

Le quali riferite alla corda XZ, come tuono principale eſprimeranno nel primo rango un *tuono maggiore*; di poi per ordine li tuoni ſeguenti, una *terza minore*, una *quarta*, una *quinta*, una *ſeſta maggiore*, una *ſettima*, un'*ottava*. Per evitare le frazioni ſi potrebbe conſiderare XZ, come un *monocordo*, del quale la lunghezza foſse 360. e le diviſioni armoniche foſsero 320. 300. 270. 240. 216. 202. $\frac{1}{2}$, 180. li quali numeri hanno tra di loro la medeſima proporzione, che le frazioni precedenti. Queſte diviſioni eſprimono li gradi dell'ottava: *ſol*, *la*, *fa*, *ut*, *re*, *mi*, *fa*, *ſol*, ſeguitando, come ha fatto Nevvtono, la ſcala di Guido Aretino; ovvero li gradi *re*, *mi*, *fa*, *ſol*, *la*, *ſi*, *ut*, *re*, riducendo la ſcala antica alla moderna; nella quale ſerie di tuoni, li colori arancio, e indico corriſpondono a due mezzi tuoni, cioè, l'arancio all'intervallo del *mi*, al *fa*, e l'indico all'intervallo del *ſi*, a *ut*. Da queſta breve ſpiegazione ſi vede, che li ſpazj delli colori non corriſpondono alle note muſicali, ma ſolamente li intervalli dell'imagine Solare riferiti alla lunghezza del monocordo. Onde ſi vede che l'analogia tra li ſuoni, e li colori non è affatto eſatta;

ta. Si potrebbero aggiungere molte altre ragioni intorno all'imperfezione della medeſima analogia; ma queſto argomento non appartiene al noſtro propoſito, ſi può leggere quel, che ne ha ſcritto il Signor De Mairan celebre fiſico e matematico nelle memorie dell' Academia di Parigi negli anni 1727, e 1738. Credo che il Nevvton abbia cercato con premura qualche corriſpondenza maggiore tra li ſuoni, e li colori; e da queſta cagione mi perſuado eſſere derivata la diviſione, che egli fa del cerchio in ſette parti proporzionali alli numeri $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{9}$, li quali numeri corriſpondono nell'antica ſcala alli ſette tuoni muſicali, *ſol*, *la*, *fa*, *ſol*, *la*, *mi*, *fa*, *ſol*.

Queſta diviſione adoperata dal Nevvton per la compoſizione delli colori *lib.* 1. *dell' ottica part.*2. *prop.*6. è diverſa da quella, che ſi è meſsa quì sù alla pag.69. Quella il Nevvton non la mette in niun luogo eſpreſſamente per la diviſione del circolo, e compoſizione de' colori; ma da molti luoghi tanto dell' ottica, quanto delle lezioni ottiche eſſa ſi raccoglie facilmente per l'imagine ſolare, ove ſi vogliano eſprimere gli ſpazj, che ivi pigliano i diverſi colori. Se ſi riflette a varj paſſi di queſte ſue opere, e ſi badi alla analogia de' colori compoſti colle force compoſte accennata quì sù alla pag.76, ſi può inferire, che inerendo alla diviſione della imagine ſolare da lui abbrac-

abbracciata, anche quì per li colori compoſti convenga il dividere il circolo nella ſuddetta maniera della pag.69. Se il Nevvton non l' ha quì abbracciata, e ne ha ſoſtituita un'altra, mi perſuado, che non l'abbia fatto ſenza qualche apparenza di ragione, che credo ſia ſtata una maggiore analogia tra li colori, e il ſuono; tanto più, che nell'una, e nell'altra maniera i colori compoſti vengono aſsai poco diverſi, e che nelle lezioni ottiche ſi moſtra alquanto irreſoluto ſulla preciſa diviſione della ſteſsa ſolare imagine, mentre dice: *Cæterum hæc non adeo præciſe obſervare potui, quin & fateri cogar, ea poſſe paulo aliter fortaſſe conſtitui*; anzi proponendo due diverſe diviſioni ſoggiunge; *ſuperiorem vero diſtributionem potius adhibui, non tantum, quod cum phænomenis optime convenit, ſed quod fortaſſe aliquid circa colorum harmonias, qualium pictores non penitus ignari ſunt, ſed ipſe nondum ſatis perſpectas habeo, ſonorum concordantiis fortaſſe analogas involvat.*

Su queſta materia ſi può vedere la belliſſima diſsertazione *De Lumine* del dottiſſimo P. Boſcovich, e mio amiciſſimo, il quale nella ſeconda parte di eſsa ha varie nuove, e profonde ricerche, anche ſu queſto iſteſso argomento della diviſione del cerchio per la compoſizione de' colori, e vi ha introdotta queſta mutazione medeſima.

Io già ho ſpiegato la compoſizione delli colori; per altro chi vorrà ridurre in pratica la

la coſtruzione precedente con maggiore eſattezza, dovrà conoſcere la degradazione delli colori, e il loro ſito nell'imagine Solare. Benchè nelle ſperienze del Priſma non ſi contino volgarmente che ſette colori, perchè preſi aſſieme ſono inſeparabili, nulladimeno le oſſervazioni fatte con arte ne dimoſtrano molti più. Facendo paſsare con lentezza un'imagine Solare ben pura ſopra un filo bianco, io ho oſservato nelli diverſi intervalli più di quindici gradi di colori d'una differenza ſenſibiliſſima alli miei occhj. Molti altri hanno provato l'iſteſſo. Onde è evidente, che per comporre più perfettamente un colore dato, devono eſsere conoſciuti con eſatta ſperienza i luoghi delli gradi diverſi negli intervalli delli colori primarj.

NUM.

NUM. III.

Esame d' un principio di Perspettiva.

E' Principio universale di Perspettiva, che gli oggetti veduti sotto angoli uguali compariscono uguali. Da questo assioma dipende il secondo teorema della Perspettiva, nel quale si è dimostrato, che le projezioni scenografiche rappresentano gli oggetti reali. Ed in fatti, essendo uguale l'angolo ottico, cioè l'imagine formata nell' occhio dalli raggi estremi dell'oggetto, per lo più gli oggetti appariscono uguali benchè disugualissimi. Se passeggiando in un viale di alberi consideriamo la parte del Cielo compresa tra i medesimi, essa ci comparirà uguale all'intervallo dello stesso viale, essendo uguale l'angolo apparente. Ma questo principio patisce qualche eccezione; o per dir meglio, ha bisogno di qualche spiegazione.

La grandezza apparente degli oggetti dipende da molte circostanze. E' certo che acquistiamo coll' uso un' idea più esatta delle grandezze reali; per esempio, considerando una fila di Soldati, il più vicino dovrebbe comparire più grande dell'ultimo; ma perchè sappiamo che l'ultimo è un Soldato come è il primo, abbiamo imparato colla sperienza a correggere questo giudizio delli nostri occhj, e ci rappresentiamo l'ultimo Soldato come della medesima altezza del primo. Questo

giudizio non vale nelle distanze troppo grandi, o nelle direzioni che non sono familiari. Imperocchè in queste sorte di distanze e di direzioni non abbiamo la sperienza, e conseguentemente non potiamo coll'ajuto della medesima riformare l'apparenza degli oggetti. Il pensiere di paragonare le grandezze apparenti e reali essendo derivato dal misurare le grandezze reali o col camminare, o colle mani, queste sperienze non possono avere luogo nelle distanze verticali, le nostre misure per lo più essendo fatte in direzioni orizzontali. Per lo contrario sappiamo riformare le grandezze apparenti, quando gli oggetti possono essere soggetti a frequenti sperienze o osservazioni. Per esempio, li mattoni quadrati d'un pavimento ci compariscono quadrati, benchè secondo le leggi medesime della perspettiva sieno rappresentati all'occhio con figure molto diverse; abbiamo coll'uso e colla sperienza conosciuto la figura reale di questi mattoni, e rettifichiamo la grandezza apparente di essi.

Il celebre Signor Perrault nell'architettura del Vitruvio combatte l'opinione ricevuta dagli Architetti e Scultori, cioè, che le Statue alzate nella cima delle fabbriche debbano essere più grosse, e scolpite con maggiore franchezza e libertà che le Statue vicine. Il lodato Autore si appoggia su questa ragione, che l'occhio essendo avvezzo alle distanze, il nostro giudizio è così perfetto che un' oggetto pare dell'istessa grandezza, o sia posto in una maggiore o minore distanza. E chiarò dalle

dalle rifleſſioni precedenti, che il Perrault non fa un'applicazione giuſta delli ſudetti principj, poichè le Statue poſte ſopra alti edifizj non ſono una coſa così familiare e commune, che ogn'uno poſſa ſubito emendare il giudizio degli occhj. Vediamo per ſperienza, che pochiſſimi ſpettatori giudicano dell'altezza delle Statue poſte nella facciata della Chieſa di S. Pietro, ſe non le hanno prima conſiderate da vicino. Nè pare meglio fondato l'iſteſſo Autore nel criticare la celebre Storia della Statua di Minerva lavorata dal Phidia, la quale era moſtruoſa viſta da vicino, ma era d'una bellezza ſorprendente conſiderata in una giuſta diſtanza. Si oſſerva il medeſimo ogni giorno in molte pitture, le quali da vicino pajono toccate groſſamente, ma ſi vedono in una convenevole diſtanza perfettamente finite.

Che la ſperienza che noi abbiamo delle diſtanze contribuiſca molto alla grandezza apparente degli oggetti è evidente da molte oſſervazioni. Ha oſſervato ogn'uno, che in una vaſta campagna le caſe che ſi credevano vicine, erano molto diſtanti. Imperocchè eſſendo avvezzi a giudicare della diſtanza per la ſerie degli oggetti frapoſti, crediamo vicine le caſe benchè lontane, quando vi ſono pochi oggetti interpoſti, come accade in una nuda campagna. Da queſta ſteſſa ragione viene in parte, che il Sole nell'Orizonte compariſce più diſtante che nel meridiano, eſſendo nel primo caſo un maggiore numero di oggetti terreſtri medii. Onde giudichiamo ancora il Sole

molto maggiore nell'Orizonte che nel meridiano. E' una ſperienza coſtante delli viandanti, che di notte tempo, o ſul fare del giorno gli oggetti vicini, come gli alberi e le caſe, ſi credono molto maggiori e più diſtanti. La cagione di queſto inganno può eſſere, che non diſtinguendo per l'oſcurità del Cielo la Terra frapoſta, queſti oggetti ſi riferiſcono alla parte più luminoſa dell'Orizonte. Onde accreſcendo la diſtanza, ſi accreſce ancora la grandezza.

Giudichiamo anche delle grandezze per paragone. Se conſideriamo gli oggetti in una valle formata da alte montagne, queſti oggetti compariranno ſtraordinariamente piccoli. Queſto errore proviene dalla cagione già accennata, poichè la grandezza apparente delli oggetti grandi e lontani, è la medeſima che la grandezza apparente degli oggetti piccoli e vicini.

Il giudizio che ſi fa delle diſtanze, e conſeguentemente delle grandezze può eſſere ſoggetto a molti inganni per cagione della maggiore o minore luce. Se nella notte alcuni oggetti ſono più illuminati, li crediamo più vicini, e forſe da queſta origine coll'ajuto della fantaſia potrebbe naſcere la rappreſentazione di alcuni fantaſmi, i quali ſvaniſcono da vicino.

Qualunqne ſia la cagione di queſti giudizj diverſi, pare certo che l'angolo apparente non è ſempre la miſura della grandezza apparente. Ma gli errori che derivano da varie circoſtanze non alterano la verità del principio di perſpettiva.

tiva. Reſta ſempre evidente, che l'imagine dell'oggetto dipinta nel fondo dell'occhio è proporzionale all'angolo ſotto il quale ſi vede l'oggetto. Di più ſi potrebbe ricevere queſto principio con qualche limitazione, cioè nei caſi, nelli quali la diſtanza apparente è la medeſima, e tutte le circoſtanze rimangono uguali. Finalmente l'arte della perſpettiva non conſiſte ſolamente nella projezione ſcenografica degli oggetti, ma ancora ſono neceſſarie tutte quelle degradazioni di ombre e di colori che formano la perſpettiva chiamata *aerea*. Da queſta giuſta diſtribuzione di tinte ſono prodotte nel dipignere li paeſi quelle lontananze che fanno il merito principale di queſto genere di pittura.

E' evidente, che il principio già eſaminato è unito con quello delle diſtanze. Si ſtabiliſce communemente, che le grandezze apparenti ſono in ragione reciproca delle diſtanze, la quale coſa non ſi deve intendere generalmente. Imperocchè è dimoſtrato, che nelle piccole diſtanze le grandezze apparenti decreſcono meno che nella proporzione delle diſtanze medeſime. Ma ſe gli angoli ottici ſono molto piccoli, ſi può conſiderare in queſto caſo la grandezza apparente in ragione reciproca delle diſtanze, come è chiaro dagli elementi di geometria. In oltre queſt'iſteſſo principio patiſce la medeſima difficoltà del primo. E' ſtato già oſſervato, che l'eſtimazione delle diſtanze dipende dalla ſerie degli oggetti frapoſti. Il noſtro occhio non potendo abbracciare aſſieme

che un piccolo numero di oggetti, non può diſtinguere in una diſtanza troppo grande tutti li oggetti interpoſti, e perciò è ſoggetto a errore nello ſtimare le grandi diſtanze. Di più li oggetti lontani dipingono nell'occhio un'imagine ben piccola, e fanno un'impreſſione troppo debole ſull'organo della viſta, onde le diſtanze apparenti ſono riſtrette in anguſti limiti. Da queſta cagione deriva, che due oggetti molto diſtanti ſono giudicati eſſere alla medeſima diſtanza apparente, benchè la diſuguaglianza ſia immenſa, come accade nel Sole e nella Luna, eſſendo il Sole diſtante da noi di 11000 diametri della Terra, e la Luna ſolamente di 60. Dalla medeſima ragione dipende in parte la concavità apparente del Cielo, eſſendo li corpi celeſti in grandiſſime diſtanze, la differenza delle quali è affatto inſenſibile ai noſtri occhj.

Dopo avere eſaminato il principio univerſale di perſpettiva, ora non ſarà fuori di propoſito il conſiderare brevemente alcune conſeguenze del medeſimo. Le linee parallele, come ABC, DEF (*fig.* 27.) riguardate obliquamente pajono convergenti. Imperocchè decreſce ſempre più la grandezza apparente degli intervalli perpendicolari AD, BM, CF &c., e conſeguentemente le linee parallele ſembrano convergere verſo la linea imaginaria, condotta dall'occhio parallela alle medeſime. Onde l'occhio eſſendo ſuppoſto in O, e alzato ſul piano orizontale ABC, il detto piano deve comparire alzarſi per gradi verſo OG; e al contra-

contrario se l'occhio sta sotto il piano DF, il medesimo piano comparirà abbassarsi. Benchè la superficie del mare sia convessa, nulladimeno la porzione di mare sensibile alli nostri occhj comparirebbe piana, se la detta ragione ottica non accrescesse la sua convessità apparente. Per questa medesima cagione la sommità degli alti edifizj comparisce inclinata verso l'orizonte; poichè fingendo tirata per l'occhio una perpendicolare all'orizonte, e parallella all'altezza dell'edifizio, le parti le più alte dell'edifizio convergeranno in apparenza verso questa perpendicolare imaginaria. Onde è ignoranza di alcuni che attribuiscono a un'errore dell'artefice quel che è effetto dell'arte.

Se si volesse trovare la curva, nella quale bisognasse disporre una lunga serie di oggetti, talmente che l'occhio alzato sopra il piano orizontale, li vedesse tutti ugualmente distanti, cioè sotto un medesimo angolo apparente, il problema sarebbe facilissimo. Imperocchè sia AD la retta nella quale siano costituiti li due primi oggetti A, D. Sia l'occhio in O, del quale l'altezza perpendicolare sia OQ. Sia QG la linea di mezzo, alla quale dal punto O si conducano le rette OD, OM. E' evidente per le condizioni del problema, che gli angoli AXD, AYM essendo uguali, li triangoli rettangoli XOD, OYM saranno simili. Onde facendo YM $= y$, XY $= x$, OQ $= f$, OX $= a$. QX $= $ O, XD $= b$, sarà YM (y) : OY $\sqrt{ff + gg + 2gx + xx}$ = XD (b) : OX (a) : e si

avrà l'equazione $aayy = bb \times ff + gg + 2gx + xx$, che è un' equazione all' iperbola. Perciò disponendo una serie di alberi, o di colonne, secondo il perimetro di due iperbole, questi oggetti sarebbero rappresentati all'occhio come posti in due rette parallele. Il problema sarebbe poco più difficile in un' altra ipotesi qualunque delle grandezze apparenti. Onde non mi trattengo a discorrerne più diffusamente. Si può vedere quel che ne ha scritto il Signore Varignon nelle memorie dell'Academia di Parigi del 1717. E' della medesima natura il problema sciolto dal Sig. Pitot nelle memorie citate dell'anno 1734., nel quale problema, essendo dati quattro punti, cerca un quinto punto, dal quale alli quattro punti dati conducendo delle linee, li tre angoli così formati siano uguali, o in qualunque ragione data. Non devo omettere la riflessione fatta dal Signor Varignon nel luogo già detto, ove quel celebre Geometra esaminando il principio delle grandezze apparenti in ragione composta degli angoli apparenti, e delle distanze ne ricava quell'inconveniente, che disponendo una serie di oggetti in una retta, si debba disporre l'altra serie opposta in una curva convergente verso la retta, per avere il paralleliſmo apparente dell'una e dell'altra serie; cosa affatto incompatibile col paralleliſmo cercato, e che dimostrerebbe l'impossibilità dell'ipotesi.

Per rispondere a questa difficoltà basta riflettere, che le apparenze dipendenti dalla sperienza, e che

e che ſono effetti della noſtra imaginazione, non ſi poſſono eſaminare col calcolo. Benchè due muraglie parallele, per eſempio, compariſcano convergere realmente, le giudichiamo parallele per ragione d'una ſperienza antecedente, e corregiamo l'errore degli noſtri occhi; ma ſe le muraglie convergono, compariranno veramente convergenti; imperocchè non abbiamo ragione ottica di paralleliſmo, gli angoli apparenti non eſſendo uguali, nè ragione di ſperienza, poichè la ſperienza dimoſtra il contrario. Onde in tali coſe che dipendono dal giudizio della noſtra mente, e da molte circoſtanze variabili di ſopra accennate, non pare che poſſano avere luogo le ſublimi ricerche analitiche.

NUM. IV.

NUM. IV.

Delle projezioni deformi, chiamate Anamorfoſi.

NElla perſpettiva volgare il piano di projezione ſi ſuppone tra l'occhio e l'oggetto; ma nel genere di projezione che ora mi propongo di conſiderare, l'oggetto è ſuppoſto tra l'occhio ed il piano di projezione. Le coſtruzioni dimoſtrate nella perſpettiva precedente, non eſſendo limitate ad alcuna poſizione determinata de' piani, potranno ancora adoperarſi in queſto caſo particolare, come ſarà evidente dalle propoſizioni ſeguenti.

PROBL. I.

Eſſendo diviſo il parallelogrammo rettangolo ABCD in un numero qualunque di piccoli parallelogrammi, e poſta la baſe AB del parallelogrammo ſopra la linea AB d'un piano, al quale il detto parallelogrammo ſia perpendicolare, ritrovare la proiezione del parallelogrammo, e delle ſue diviſioni ſul piano dato, eſſendo dato il punto di veduta.

Dal punto di veduta O (*fig.*28.) ſi conduca la perpendicolare RO, che ſarà la diſtanza del quadro. Per i punti di diviſione della baſe ſiano condotte le rette RA*d*, RB*c* &c. Si faccia AD ugua-

uguale all'altezza del parallelogrammo, e si prenda RI uguale alla distanza del quadro, e siano ambedue le linee perpendicolari ad RA. Dal punto I per le estremità, e divisioni di AD si tirino ID*d*, IF*f* &c. che tagliano RA prolungata, nelli punti *d*, *f*, *m* &c. per i quali si conducano le linee *dc*, *fe*, *ml* &c. parallele ad AB. Il trapezio AB*cd* così diviso in piccoli parallelogrammi sarà la projezione cercata.

DIM.

Si concepisca, come nel probl. 1. della perspettiva, il piano del triangolo RI*d* rivolgersi intorno alla linea RA*d*, finchè diventi perpendicolare al piano del quadro. Allora il punto I coincide con O, e li punti A, *m*, *f*, *d* &c. saranno le projezioni delli punti A, M, F, D &c. Per la medesima ragione, le linee condotte dal punto R alle divisioni della base saranno le projezioni delle linee perpendicolari ad AB, e le linee *dc*, *fe* &c. saranno le projezioni delle linee DC, FE &c. (*cor.* 1. *teor.* 4.)

L'istesso problema si può facilmente costruire in un'altra maniera colla projezione delle linee DC, FE &c. parallele al quadro (*cor.* 3. *del teor. citato*.)

Cor. 1. Se il parallelogrammo ADCB si riducesse al quadrato AFEB, è evidente, che essendo FB la diagonale di tutti i piccoli quadrati, sarebbe ancora B*f* la diagonale di tutte le loro projezioni.

Simil-

Similmente *Id* ſarebbe la diagonale di tutte le projezioni del quadrato LMDC.

Cor. Da queſto problema ſi ricava il metodo delle *Anamorfoſi* che conſiſte nel diſegnare una pittura, la quale compariſce difforme veduta direttamente, ma acquiſta una giuſta proporzione, quando è riguardata da un certo punto. Si deſcrive un parallelogrammo, o un quadrato intorno a una pittura originale, e ſi divide in molti piccoli quadrati. Di poi avendo diviſo un'altro quadrato ABEF d'un lato qualunque, nel medeſimo numero di piccoli quadrati, ſi trova la ſua projezione AB*ef*, e ſi trasferiſcono li lineamenti, e li colori di ciaſchedun quadrato della pittura originale nelli trapezj corriſpondenti della projezione AB*ef*. E evidente che la pittura difformata comparirà riformata all'occhio in O; poichè l'imagine di tutta la pittura, e di tutte le ſue parti nell'occhio, e l'iſteſſa, come ſe i raggi foſſero venuti all'occhio originalmente dalla pittura regolare diſegnata in miniatura nel quadrato ABEF, poſto perpendicolarmente ſopra la baſe AB. Per maggiore inganno delli ſpettatori ſi ſogliono ornare con arte queſte ſorte di projezioni di varj diſegni, i quali anche veduti direttamente facciano illuſione agli occhi. Creſce l'inganno ottico, ſe queſte trasformazioni ſono riguardate con un piccolo tubo o a traverſo un buco, per ſottrarre agli occhi gli oggetti frapoſti, e naſcondere la diſtanza.

PROBL.

PROBL. II.

Disegnare in un piano una copia difforme d'un originale, la quale riflessa dalla superficie d'un cilindro comparisca regolare all'occhio in O.

Dal punto O, si abbassi la perpendicolare OR, (*fig.*29.) e si conducano le due linee R*a*, R*e*, le quali possono essere tangenti, o secanti del circolo *lnp* base del cilindro, secondo la maggiore, o minore deformità, che si vuole dare alla figura. Sopra la base *ae*, alzando un parallelogrammo o un quadrato si trovi la sua projezione, *aekf*, come nel problema precedente; tolto il cilindro, la figura veduta dal punto O, comparirebbe regolare. Ma nel caso di questo problema, li raggi essendo intercetti dalla superficie del cilindro, e conseguentemente riflessi dalla medesima, si devono cercare questi raggi riflessi, facendo, secondo le leggi di ottica, l'angolo di riflessione uguale all'angolo d'incidenza. Perciò considerando li raggi R*lf*, R*mg* &c. come partendo dal foco R, e riflessi dalla base, *lmnp*, si tirino li raggi riflessi, *l* F, *m* G &c. talmente che prolungando il raggio riflesso ed il raggio incidente, essi taglino segmenti uguali del cerchio. Finalmente si trasferiscono le linee *l*A*f*, *mbg* &c. con tutte le loro parti sopra le linee rispettive *l*AF, *m*BG &c. per i punti ABCDE, FGHIK, e per gli altri punti intermedii si facciano passare gli archi di curva, come ABCDE, la figura ACEKHF, così divisa comparirà

rirà regolare nella ſuperficie del cilindro veduta dal punto O. E' evidente che la coſtruzione ſarebbe la medeſima, ſe l'arco, *lmnop*, foſſe concavo, cioè, ſe la ſuperficie riflettente del cilindro foſſe concava.

DIM.

Poichè le linee, *af*, *bg* &c. con tutte le altre diviſioni del trapezio, *aefk*, ſono le projezioni del parallelogrammo poſto in, *ae*, e le linee AF, BG &c. ſono per coſtruzione, le medeſime projezioni rifleſſe dal cilindro, è evidente che il piano della figura AFHKE, rappreſenta il parallelogrammo trasformato, e rifleſſo dalla ſuperficie del cilindro nel piano EGHK. Onde ſiccome il trapezio *afke*, veduto dal punto O, produce un'imagine regolare, così ancora la projezione irregolare AFHKE rifleſſa all'occhio in O, deve fare l'iſteſſa impreſſione, come ſe i raggi partiſſero direttamente dalle linee del trapezio, o dalle linee del parallelogrammo, cioè l'imagine deve comparire regolare, e colle ſue giuſte proporzioni. La dimoſtrazione ſarebbe l'iſteſſa nel caſo della concavità.

Cor. 1 Poichè la baſe d'un cono è un circolo, li raggi rifleſſi dalla ſuperficie conica ſi determineranno come nella ſuperficie cilindrica. Onde ſi vede il modo di fare una trasformazione, la quale appariſca regolare veduta in una ſuperficie conica, o conveſſa, o concava.

Cor.

*Cor.*2. Le ombre delle figure essendo le projezioni scenografiche delle medesime, (*Def.*5. *della perspettiva*) si potrà con un metodo puramente meccanico e facile trasformare una figura qualunque in una superficie convessa, o concava, o in qualunque modo irregolare. Si alzi perpendicolarmente sopra un piano l'oggetto da trasformare,dietro al quale si ponga una candela accesa,talmente che l'ombra dell'oggetto cada sulla superficie data. L'ombra e conseguentemente la projezione tanto sarà più grande e difforme, quanto più vicina sarà la candela e meno alta sul piano di projezione. Dipoi si segnino nell'ombra li lineamenti e li colori.si avrà la trasformazione dell'oggetto, il quale comparirà riformato, ponendo l'occhio nel luogo della candela. Se si piccano con un'ago li principali lineamenti dell'immagine, in vece dell'ombra si avranno varj punti luminosi li quali segnati colli colori loro proprii rappresenteranno l'immagine riformata all'occhio posto nel sito della candela. Si deve osservare che i raggi solari non sono a proposito in questo caso, poichè essendo paralleli non convengono nel punto ove si suppone l'occhio.

*Cor.*3. Questi problemi si possono anche costruire per mezzo delle curve, che sono chiamate dalli Geometri *caustiche per riflessione*. Sia il circolo ABCD (*fig.*30.), la base d'un cilindro o una sezione del medesimo parallela alla base, e che passa per l'occhio O. Sia nel piano di questa base la linea *prt*, dell'imagine trasformata (*per il probl.*

*probl.*3.) la curva, *oabgd*, ſia la cauſtica per rifleſſione delli raggi che partono dal punto O, overo dall'occhio, e per li punti *a*, *b*, *g*, *d* &c. ſi tirino le rette P*a*. R*b* &c. che ſiano tangenti della curva e ſecanti del cerchio riflettente in A, B, C, D, &c.. Siano condotte le rette OA, OB, OC &c., e ſi faccia AP = *Ap*, B*r* = BR &c.. La linea PRT, rifleſſa dalla ſuperficie del cilindro comparirà come ſe foſſe veduta direttamente coll'occhio in O, tolto il cilindro. L'iſteſſo s'intende di qualunque altra linea dell'imagine trasformata, la quale conſeguentemente apparirà tutta regolare veduta dal punto O. E' chiaro dalla coſtruzione, che ſenza deſcrivere la cauſtica baſterebbe condurre il raggio OB e la ſua rifleſſione BR, che taglia PX, in qualche punto R, e fare B*r* = BR &c. il problema inverſo ſi coſtruirebbe coll'iſteſſa maniera, cioè, data la rifleſſione in X, T, R, ſi troverebbe l'immagine diretta, *p*, *r*, *t* &c.

*Scol.*1. Poichè nel corollario precedente ho fatto menzione dalle cauſtiche per rifleſſione, non ſarà fuori di propoſito il conſiderare brevemente la natura di queſte curve. Se infiniti raggi incidenti come AB, AB &c. (*fig.*31.) che ſtanno tutti nel medeſimo piano d'incidenza, non tendono al medeſimo punto dopo la loro ultima rifleſſione, ma ſi interſecano in un numero infinito di punti, la curva della quale ſono tangenti tutti queſti raggi ſi dice: *cauſtica per rifleſſione*, e verrebbe chiamata: *cauſtica per rifrazione*, ſe li raggi foſſero rifratti; ma queſta ultima ſpezie di curva benchè

ſoggetta alla medeſima teoria, non appartiene al preſente trattato. Se due tangenti BF, BF ſi interſecano nel punto G avvicinandoſi l'una all'altra, finchè coincidano, ſi accoſteranno ancora li punti di contatto e d'interſezione, e finalmente coincideranno. Onde è evidente che li raggi rifleſſi ſono tangenti della cauſtica in quel punto del raggio, ove la ſua interſezione col raggio proſſimo ſvaniſce. Perciò ſe ſi concepiſcono due raggi incidenti infinitamente vicini moverſi intorno al punto A, nel piano d'incidenza, il punto F interſezione delli raggi rifleſſi ſarà alla cauſtica, la quale è chiamata o reale, o imaginaria ſecondo che li raggi rifleſſi ſono convergenti o divergenti. Per dare una notizia eſatta delle cauſtiche per rifleſſione, ſi deve primieramente conſiderare la rifleſſione delli raggi in una ſuperficie piana. Queſti raggi rifleſſi prolungati concorrono in un punto, il quale ſi trova conducendo dal punto luminoſo una perpendicolare alla ſuperficie piana, e prolungando la detta perpendicolare finchè la parte prolungata ſia uguale alla perpendicolare medeſima. L'eſtremità della parte prolungata ſarà il punto cercato. Si ſuole conſiderare nella geometria infinitesimale una porzione di curva infinitamente piccola come una linea retta della quale la tangente ſia un prolungamento. Supponiamo dunque un lato infinitesimo di curva prolungato in tangente, e immaginiamo due raggi infinitamente vicini che cadono ſopra queſto lato, parerebbe agli uomini poco intelligenti del metodo infinitesimale, che

per trovare il punto di concorso delli raggi riflessi, bastasse condurre dal punto luminoso una perpendicolare a questa tangente, e prolungarla come si fa nella superficie piana.

Ma è certo che l'estremità di questa perpendicolare prolungata non è un punto della caustica; imperocchè considerando una piccola porzione di curva come retta, bisognerebbe che le perpendicolari alla curva condotte alle due estremità del lato infinitesimo fossero esattamente parallele, come lo sarebbero, se la superficie fosse retta. Il contrario è evidente, poichè le perpendicolari concorrono a una certa distanza, e col loro concorso formano il raggio detto dell'*Evolata*. Dunque è necessario di considerare la posizione di queste perpendicolari concorrenti, per determinare la posizione delli raggi riflessi, e conseguentemente il punto di concorso il quale in questo caso è tutto altro che nella superficie retta. Considerando una curva come un poligono, le perpendicolari alla curva non devono essere perpendicolari alli lati della medesima, ma dividono ugualmente l'angolo infinitamente ottuso formato dalli lati infinitesimi, altrimente nel punto di concorso delli due lati vi sarebbero due perpendicolari, una per ciaschedun lato, la quale cosa è impossibile, non essendo che una perpendicolare ad ogni punto di curva. Dunque li raggi incidenti e riflessi devono fare colla perpendicolare angoli uguali.

Essen-

Essendo premesse queste osservazioni; Sia S un punto luminoso (*fig.*32.) overo il foco delli raggi incidenti, PL*p* la tangente in L, sia LC, il raggio dell'evoluta in L, L*m* il raggio riflesso talmente che l'angolo CLM sia uguale a CL*s*. Allora se li raggi riflessi sono sempre tangenti della curva *bme*, essa sarà la caustica per riflessione.

Sia SP la perdendicolare alla tangente LP che incontra sempre la curva DP in qualche punto P, e sia la curva DP l'evoluta di HME, della quale PM, sia tangente in M. Si conduca SM e si prolunghi in, *m*, finchè S*m*, sia uguale a 2SM sarà *m* un punto alla caustica della curva BL. Imperocchè essendo, MP perpendicolare alla curva DP, sarà l'angolo MPS uguale al complemento di, SLP, cioè a LSP, per il metodo delle tangenti, e sarà SL divisa ugualmente in K. Onde S*m*: SM = SL: SK; e L*m*, sarà parallela a KM tangente di HME. Ma la figura, *bme*, e simile a HME e similmente posta, perciò L*m* è tangente di *bme*. Di più essendo L*m*, parallela a PM, l'angolo *m*LC = MPS = LSP = CLS. Onde essendo SL raggio incidente, sarà *lm* raggio riflesso, e il punto *m* sarà alla caustica.

Si prenda L*s* sopra il raggio riflesso = LS; dal punto C si conduca CR perpendicolare al raggio LS, e sia L*q* = *q*R, saranno *qs*, *q*R, *qm* in proporzione continua, poichè sono in proporzione continua *sq*, *s*L, 2PM (*per la teoria delle evolute*). Sia CI perpendicolare a SL in I, e si divida IL ugualmente in Q, essendo S della parte

concava, e LS maggiore di LQ, sarà PM = PK (SK) + KM, e 2PM = $sL + Lm$. Onde $sq : qL$ (qR) = $sL : Lm = qR : qm$. Ma essendo S tra Q e L, allora 2PM è uguale alla differenza di Lm, Ls, e $Sq : qL = SL : Ln = qL (qR) : qm$. Si vede nell'istessa maniera che essendo S della parte convessa della curva, sono sq, qR (qL), qm in proporzione continua. Se il raggio incidente sia perpendicolare alla curva, coincide col raggio riflesso, s cade in S, C in R e qm, qS sono in proporzione continua. generalmente $sq \times qm = qR^2 = qL^2$, e li raggi incidenti essendo paralleli coincidono li punti m, q, e $ml = \frac{1}{2}$ LR. Se LS = $\frac{1}{2}$ LI, essendo S nella parte concava della curva, coincidono s, q, e il raggio riflesso Lm diventa asintoto della caustica.

Da questi elementi si può facilmente ricavare l'espressione analitica. Imperocchè sia SL = r, SP = p, si avrà $Lq = \frac{pdr}{2dp}$ Onde $Lm : SL = \frac{pdr}{2dp} : r + \frac{pdr}{2dp}$. Essendo data l'equazione della curva LB, sarà data la ragione di SL a SP espressa per qualche funzione delle coordinate, e perciò col calcolo infinitesimale si potrà trovare la caustica, e al contrario data la caustica si troverà la curva di riflessione.

Scol. 2. Dall'espressione precedente si ricavano facilmente le formole analitiche date dal Bernoulli, e dal Marchese dell' Hospital. Sia $r = y$ l'archetto del cerchio descritto col raggio y, $= dx$

$= dx$ l'elemento dell'arco ds, ſi avrà $p = \frac{ydx}{ds}$,

$dp = dydxds - \frac{ydxdds}{ds^2} = dydxds - \frac{ydxdyddy}{ds^3}$.

Onde $Lm = \frac{prdr}{2rdp + pdr} = \frac{y^2 dy dx}{ds}$:

$(2ydydxds - 2y^2 dxdds + ydydxds)$

$= \frac{y(dx^2 + dx^2)}{(2+1)(dx^2 + dy^2) - 2yddy}$, nella qua-

le formola ſi ſuppone dx coſtante. Se li raggi incidenti ſono paralleli, eſſendo $Lm = \frac{1}{2}LR = \frac{pdr}{2dp}$ la formola precedente ſi muta in queſta $Im = ydyds^2 : 2dyds^2 - 2ydyddy = \frac{ds^2}{-2ddy}$, poichè eſſendo in queſto caſo y infinita, ſvaniſce la quantità $2dyds^2$. Per eſempio nella parabola eſſendo $y = \sqrt{ax}$, ſarà $dy = \frac{adx}{2\sqrt{ax}}$, $dy^2 = \frac{adx^2}{4xx}$, $ddy = -\frac{adx^2}{4x\sqrt{ax}}$; onde $\frac{ds^2}{-2ddy} = \frac{a+4x\sqrt{ax}}{2a} = Im$.

Sarà ancora facile il determinare l'interſezione del raggio rifleſſo coll'aſſe della curva. Imperocchè ſia AMD (*fig.* 33.) una curva qualunque, il raggio incidente PM ſia perpendicolare all'aſſe, QM perpendicolare alla cur-

curva, si avrà MP : MO = PQ : OQ, cioè, essendo $PQ = \frac{ydy}{dx}$, ed il triangolo MPO essendo rettangolo, sarà $MO = \frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 - dy^2}$. Onde si ricaverà ancora $PO = \frac{2ydxdy}{dx^2 - dy^2}$. Finalmente per ritrovare le coordinate AR, FR della caustica, si cerca per la similitudine delli triangoli MPO, MSF la retta $PR = \frac{dxdy}{-ddy}$ e si avrà $FR = MP - SP = y + \frac{dy^2 - dx^2}{-2ddy}$, e $AR = x + \frac{dxdy}{-ddy}$. Dunque essendo data l'equazione alla curva AMD si scacciano l'incognite x, y, e resta l'equazione tra le coordinate AR, RF della curva cercata. Sia $RF = z$, $AR = u$, sarà nella parabola $z = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{2}{3}}$, e alzando al quadrato $zz = \frac{9}{4}x - 6xx + 4x^3$. Di più $u = 3x$; onde si ha l'equazione della caustica $uzz = \frac{4}{27}u^3 - \frac{2}{3}auu + \frac{3}{4}aau$.

Da questi medesimi principii si potrebbe ancora determinare la curva che riflettesse li raggi secon-

ſecondo una condizione data. Imperocchè eſſendo $PQ = \frac{ydy}{dx}$, ſoſtituendo il valore della ſottonormale PQ, ſecondo le condizioni del problema, ſi avrà un'equazione differenziale, l'integrale della quale eſprimerà l'equazione della curva. Se per eſempio ſi cercaſſe la curva, la quale ricevendo li raggi paralleli al ſuo aſſe, li riuniſſe in un dato punto. Sia NM il raggio incidente, $AP = x$, $PM = y$, la ſottonormale $PQ = s$. Sia ML il raggio rifleſſo, $AL = z$, ſarà $LQ = s + x - z$. Di più $LM^2 = \sqrt{z - x^2 + y^2}$. Ma LM × MO = LQ × QO, cioè, eſſendo in queſto caſo MN infinito = QO, ſarà LM = LQ. Onde ſi avrà $s + x - z = \sqrt{+z - x^2 + y^2}$, e quadrando $s^2 + 2sx - 2sz = y^2$. Ora in vece di s ſi ſoſtituiſca il valore $\frac{ydy}{dx}$, ſi avrà l'equazione $ydy^2 + 2xdxdy - 2zdxdy = ydx^2$, la quale integrata darà $x = \frac{y^2}{4z}$, ovvero $4zx = y^2$, che è la proprietà della parabola, nella quale il lato retto è uguale a 4AL.

PROBL. III.

Data l'anamorfoſi ritrovare la parte della medeſima viſibile all'occhio in una qualunque poſizione data, nella ſuperficie d'un cilindro, o d'un cono, o anche d'un altro ſolido qualunque di rivoluzione.

E' evidente che la ſuperficie d'un ſolido qualunque di rivoluzione può conſiderarſi come compoſto di infiniti cerchj delli quali i diametri ſono le ordinate della curva genitrice. Onde dividendo l'aſſe in minime parti, li cerchj corriſpondenti rappreſenteranno tutta la ſuperficie del ſolido. Ora ſia AT*tu* (*fig.* 34.) uno delli detti cerchj deſcritto dalla rivoluzione dell'ordinata AT che incontra l'aſſe AP in A. Sia O l'occhio, P il punto nel quale TP, tangente della curva genitrice taglia l'aſſe. Si conduca PO, la quale prolungata, ſe è neceſſario, incontri il piano del cerchio T*tu*, in Q. Di più condotte le rette QT, Q*t*, tangenti del cerchio in T, *t*, l'arco T*t* ſarà viſibile, l'altra parte rimanendo naſcoſta.

La dimoſtrazione è manifeſta: poichè li piani POQT, POQ*t* ſono piani tangenti del circolo e della curva genitrice in T, *t*, e conſeguentemente ancora delle minime parti della ſuperficie. Baſterà oſſervare brevemente diverſi caſi ſecondo la poſizione del punto O. Se O cadeſſe in P, tutto il circolo, T*tu* ſarebbe viſibile. Se ſi ſupponeſſe l'occhio caminare verſo *o*, in linea retta, l'arco

T*ut*

Tut diventerebbe visibile, e rimarebbe Tt nascosto. Sia l'occhio in ω, talmente che sia ωP parallela a qualche diametro del cerchio Ttu, sarà Tt un semicerchio, e supponendo ωP infinita, tutti li archi Tt saranno semicircoli, e la proj. zione della figura sarà simile ed uguale alla figura genitrice. Si potrebbe ancora supporre che il punto Q non cadesse fuori del cerchio Ttu; onde la determinazione delli punti T, t sarebbe impossibile.

Cor. Se il solido fosse un cono, supposto l'occhio in P, o anche in qualunque lato del cono prolungato, sarebbe visibile tutta la superficie del cono. Onde in questo caso l'anamorfosi potrebbe vedersi in tutta la superficie del cono. Ma se il solido fosse un cilindro, è chiaro che l'arco Tt compreso tra le due tangenti sarebbe sempre minore d'un semicerchio, e che l'occhio collocato in un lato qualunque prolungato del cilindro non potrebbe vedere l'anamorfosi.

NUM. V.

NUM. V.

Dell'ombra delle figure date.

BEnchè io abbia già ſpiegato e dimoſtrato la pratica delle ombre nelli ultimi eſempj della perſpettiva, nulladimeno la materia eſſendo capace di ſublimi conſiderazioni matematiche, ho creduto doverne trattare un poco più diffuſamente in queſto luogo.

PROBL. I.

Eſſendo dato il centro colla diſtanza del quadro. Data di più la linea evaneſcente d'un piano colla projezione d'un punto luminoſo e della ſua poſizione ſu queſto piano, ritrovare la projezione dell'ombra d'un punto, del quale ſono date la projezione e la poſizione ſull'iſteſſo piano, e trovare il punto evaneſcente del raggio di luce.

Sia, ET (*fig.* 35.) la linea evaneſcente data, *s* la projezione del punto luminoſo, R la projezione della ſua poſizione; A la projezione del punto originale del quale ſi cerca l'ombra; B la projezione della ſua poſizione, e P ſia il punto evaneſcente delle linee perpendicolari al piano dato, il quale punto ſi ritrova (*per il problema* 14.). Si conduca RB che tagli la linea evaneſcente in V e ſia condotta VP: Di poi conducendo SA, che tagli RV in C e PV in D ſarà C l'om-

l'ombra cercata, e D il punto evaneſcente del raggio di luce.

DIM.

Li punti originali di R, B, A, ſono in un piano perpendicolare al piano dell'ombra; onde l'ombra ſarà nel punto C, che è l'interſezione del raggio SA, col piano RB. Di più V è il punto evaneſcente di RB. Perciò PV è la linea evaneſcente di RSAB, e conſeguentemente D è il punto evaneſcente di SA.

Cor. 1. Se il punto originale di luce ſia dietro allo Spettatore, talmente che non poſſa eſſere rappreſentato ſul quadro, la ſua projezione può dirſi imaginaria, eſſendo come l'ombra dell'occhio dello ſpettatore ſul quadro. Onde deve concepirſi trasferita nella parte del piano oppoſta al punto originale; cioè ſe (*num.* 2.) B foſſe tra P e A, nel caſo preſente S deve eſſere tra P e R. Overo ſe il punto luminoſo foſſe il Sole, ed anche un'altra luce qualunque, purchè ſuppoſta ad una diſtanza infinita, coinciderebbero li punti R, V ſiccome ancora li punti D, S come ſi vede rappreſentato *num.* 3. ove il Sole è ſuppoſto nel quadro, e *num.* 4 ove ſi ſuppone dietro allo ſpettatore. Onde la ſua projezione imaginaria è in S.

Cor. 2. Eſſendo data una figura qualunque ſi poſſono avere li punti evaneſcenti di tutte le linee della medeſima (*probl.* 2.). Onde avendo la poſizione d'un punto qualunque della figura ſopra il piano

piano dell'ombra, e ritrovando (*probl.* 13.) la posizione di altri punti della medesima figura, si potrà con questa propposizione determinare le loro ombre.

Cor. 3. Con questa medesima propposizione si può trasportare l'ombra d'un piano all'altro. Imperocchè essendo data la posizione d'un raggio di luce rispettivamente a un piano del quale è data la linea evanescente, sarà ancora data la posizione del raggio rispettivamente ad un' altro piano del quale la linea evanescente è data. Di più essendo data la projezione d'una linea e della sua posizione sopra uno delli piani, si troverà la projezione della posizione di questa linea sopra l' altro piano (*probl.* 17.). Onde si avrà l'ombra cercata.

Cor. 4. Questo problema colli suoi corollari basta per definire l'ombra di qualunque figura sopra qualunque piano. Col medesimo metodo si potrebbero determinare le ombre prodotte da diversi punti luminosi, o diretti, o riflessi, la qual cosa sarebbe utilissima nella pittura, e massimamente se si osservasse la diminuzione delli colori, e delle ombre secondo la maggiore distanza dalli punti luminosi, e la riflessione della luce. Ma sarebbe impossibile il determinare queste cose con un'esatta teorìa. Si potrebbe vedere a questo propposito un saggio e come un principio di sperimenti fatti dal Sig. Maraldi, e descritti nelle memorie dell'academia nell'anno 1722.

Scol. Con quest'istesso metodo si potrebbero ritrovare diversi punti ombrosi d'una curva qualunque

lunque data, e per *approſſimazione* l'ombra di tutta la curva, e la ſua projezione in un piano dato; Ma li geometri ſapranno determinare eſattamente la curva prodotta dall'ombra d'una curva qualunque data ſopra un piano dato: E' evidente che le curve formate dall'ombra d'una curva ſono le curve medeſime, che naſcono dalla ſezione d'un cono del quale il polo è il punto luminoſo, e la baſe è la curva dàta. Onde trovando col calcolo la ſezione del cono dato, e del piano di projezione, ſi avrà la curva cercata, come ſarà chiaro dalli problemi ſeguenti.

PROBL. II.

Dato il cono luminoſo FPG, il di cui polo ſia P, e data l'altezza d'un oggetto PD in un piano dato di poſizione HTA ritrovare la curva ombroſa nell'iſteſſo piano.

E' evidente dallo Scolio precedente, che la curva cercata è l'interſezione della ſuperficie data col piano HTA (*fig.36.*). Ora eſſendo RT l'aſſe conjugato della ſezione, ſi conduca *cn* parallela ad RT, e *cu* parallela ad FG. Si faccia $Pd = b$ il ſeno dell'angolo $ACP = b$, il coſeno $= c$, il ſeno dell'angolo CPH, ovvero $CPA = p$, il coſeno $= d$. Eſſendo CHF uguale alla ſomma, e PAC uguale alla differenza degli angoli HCP, CFH, ſarà $bd + cp$ uguale al ſeno dell'angolo CHF, e $bd - cp$ uguale al ſeno dell'angolo PAC (*per gli elementi di trigonometria*) ſuppoſto il raggio

raggio = I. Di più il seno dell'angolo PCA è al raggio come Pd è a PC, onde farà PC = $\frac{b}{b}$.

Inoltre $bd + cp : p = \frac{b}{b} : HC = \frac{bp}{b \times bd + cp}$, e $bd - cp : p = \frac{b}{b} : AC = \frac{bp}{b \times bd - cp}$, e conseguentemente essendo $p^2 = 1 - d^2$, e $b^2 + c^2 = 1$. farà $AH = \frac{2bdp}{bb + cc \times dd - cc}$. Di più $d : p = PC \left(\frac{b}{b}\right) : \frac{ph}{db} = rc$. Finalmente (per la natura della curva) $HC \times AC \left(\frac{p^2b^2}{b^2 \times d^2 - c^2}\right) : cn^2 \left(\frac{p^2b^2}{d^2b^2}\right) = AH^2 \left(\frac{4b^2p^2d^2}{d^4 - c^4}\right) : \frac{4b^2p^2}{d^2 - c^2} = RT^2$. Onde apparisce, che d essendo maggiore di c, la curva descritta è un' ellisse, della quale l' asse traverso = $\frac{2pdh}{d^2 - c^2}$, il conjugato = $\frac{2ph}{d^2 - c^2}^{\frac{1}{2}}$, ed il parametro = $\frac{2ph}{d}$. Se $d = c$, allora la quantità $\frac{2bpd}{d^2 - c^2}$ diventa infinita, e l'ellisse si muta in una parabola, della quale il para-

parametro $= \frac{2bb}{c}$; ma ſe d è minore di c, allora $\frac{2bdp}{d^2 - c^2}$ diventa negativa, e la curva ſi muta in iperbola, della quale l'aſſe traſverſo $= \frac{2bpd}{c^2 - d^2}$, il conjugato $= \sqrt{\frac{2pb}{c^2 - d^2}}$, ed il parametro $= \frac{2pb}{d}$. Finalmente ſe $d = o$, il parametro $\frac{2pb}{d}$ è infinito, e l'iperbola degenera in linea retta.

Queſto problema ſarebbe un problema di Gnomonica, ſe Pd eſſendo l'altezza d'uno ſtile, il piano di ſezione foſſe l'orizonte, e ſe l'aſſe PCB eſſendo parallelo all'aſſe della terra, l'angolo BPF, o BPG foſſe uguale al complemento della declinazione del Sole ſuppoſta invariabile, e ACP uguale all'altezza del polo. Il problema eſſendo eſpreſſo in queſt'altra maniera, la declinazione eſſendo maggiore del complemento della latitudine, la curva ombroſa ſarebbe un'elliſſe, eſsendo minore, un'iperbola, nel caſo d'uguaglianza, una parabola; la declinazione eſsendo nulla, l'iperbola ſi muterebbe in retta, che è il caſo dell'Equinozio.

Cor. Da queſto problema ſi fa evidente quel che aſſeriſce Nevvtono nell'Enumerazione delle linee

linee del terzo ordine: *Si in planum infinitum a puncto lucido illuminatum umbræ figurarum projiciuntur, umbræ ſectionum conicarum ſemper erunt ſectiones conicæ*. Soggiunge l'autore: *Quemadmodum circulus umbram projiciendo generat omnes ſectiones conicas, ſic parabolæ quinque divergentes umbris ſuis generant & exhibent alias omnes ſecundi generis curvas*. Per dimoſtrare queſt'altra parte, premetterò il lemma ſeguente.

Lemma. Sia in un piano BDG (*fig.*37.) la curva BD, l'aſse della quale ſia BG, e ſia fuori di queſto piano un punto dato A, dal quale partano infinite rette terminate al perimetro della curva data, ſi troverà l'equazione di quella ſuperficie conica. Sia AB $= b$, AP $= x$. Si conduca MP perpendicolare ad AB $= y$. Da un punto qualunque N della ſuperficie conica ſi abb. ſia NM $= z$ perpendicolare al piano delle linee AB, BG. Siano BG le coordinate della curva BD, u, s. Poichè è data la poſizione del punto A, ſarà dato l'angolo GBA; cioè la ragione di BO ad OG ſarà data conducendo GO perpendicolare ad AB, ſia queſta ragione $= \frac{m}{n}$. Onde ſi avrà

$$BG : BO = \frac{}{\sqrt{nn+mm} : m}, \text{ e } BO = \frac{mu}{\sqrt{nn+mm}}.$$

Di più $BG : OG = \frac{}{\sqrt{nn+mm}} : m$; onde

OG $=$

$OG = \frac{nu}{\sqrt{nn+mm}}$. In oltre per la fimilitudine delli triangoli $OG : BO = PM(y) : PK = \frac{my}{n}$, e $AK : MK = AB : BG$. Onde eſſendo $MK = \sqrt{PM^2 + PK^2} = \sqrt{\frac{mm}{nn}y^2 + y^2}$, e $AK = AP + PK = x + \frac{my}{n}$ ſi avrà $x + \frac{my}{n} : \sqrt{\frac{mm}{nn}yy + yy} \left(y\sqrt{\frac{mm+nn}{nn}}\right) = b : by$

$\frac{\sqrt{\frac{mm+nn}{nn}}}{x+\frac{my}{n}} = u$. Finalmente per la fimilitudine delli triangoli, $KM\left(y\sqrt{\frac{nn+mm}{nn}}\right) : MN(z) = BG\left(by\sqrt{\frac{nn+mm}{nn}}\right) : DG\left(\frac{bz}{x+\frac{m}{n}y}\right)$

$\frac{by\sqrt{\frac{nn+mm}{nn}}}{x+\frac{m}{n}y} = s$.

In queſta ſoluzione ſi ſuppone l'angolo GBO acuto, poichè ſi è preſa $AK = x + \frac{m}{n}y = AP + PK$. Ma ſe l'angolo GBO foſse ottuſo, è evidente che AK ſarebbe $= x - \frac{m}{n}y$. Onde ſi avrebbbe in queſto caſo $s = \frac{bz}{x - \frac{m}{n}y}$, e $u = by \sqrt{\frac{mm + nn}{nn}} : x - \frac{m}{n}y$. Se l'angolo foſse retto, ſarebbe $m = o$, onde verrebbero le equazioni ſempliciſſime, $s = \frac{bz}{x}$, $u = \frac{by}{x}$.

E' evidente, che eſsendo data l'equazione della baſe BD eſpreſsa per u, s, e ſoſtituendo i loro valori $\frac{by\sqrt{mm + nn}}{nx + my}$, e $\frac{bz}{x + \frac{m}{n}y}$ dati per l'equazione della curva, ſi avrà l'equazione alla ſuperficie conica. Per eſempio, il cono eſsendo retto, e conſeguentemente $m = o$, l'equazione precedente diventa $s = \frac{bz}{x}$, e $u = \frac{by}{x}$. Onde ſe la baſe foſse un cerchio, cioè $ss + uu = aa$, l'equa-

l'equazione del cono retto diventa $\frac{aa}{bb} xx = yy + zz$; e ſupponendo coſtante una delle variabili x, y, z è chiaro, che ſi ritornerebbe alla curva, che è la baſe del cono; così facendo $z = b$, ſi avrà $yy + xx = aa$, equazione al cerchio. Sia la curva della baſe $xyy = ax^3 + bxx + ex + d$, l'equazione del cono ſarà $xy^2 = ax^3 + bxxz + exzz + dz^3$, nella quale ſupponendo di nuovo z coſtante, ſi ritrova la curva come prima. Ma ſe in vece di z ſi faceſse x coſtante, verrebbe l'equazione $yy = a + bz + azz + ez^3$, che è l'equazione delle parabole divergenti.

Cor. Poichè le variabili u, s ſono eſpreſse per una funzione di dimenſione, nulla delle coordinate della ſuperficie conica, qualunque funzione delle medeſime variabili ſarà parimente una funzione di dimenſione nulla delle medeſime coordinate. Perciò qualunque ſia l'equazione della baſe, tutti i termini eſsendo del medeſimo grado dopo avere fatta la ſoſtituzione, l'equazione alla ſuperficie conica ſarà ſempre omogenea. Queſta è una proprietà commune a tutte le ſuperficie coniche, nelle quali le coordinate partono dal polo, che in tutti i termini della loro equazione le variabili preſe inſieme ſono del medeſimo grado. Onde ſi ricava, come nel lemma, che eſsendo la curva della baſe $xyy = ax^3 + bxx + ex + d$,

l'equazione del cono sarà $xy^2 = ax^3 + bxxz + exzz + dz^3$.

PROBL.

Data una superficie conica, ritrovare la curva che forma la sezione della superficie con un piano qualunque dato di posizione,

Sia una superficie qualunque espressa colle tre coordinate AP, x, PM, y, MN, z (*fig.*38.). Se un piano dato di posizione incontra li tre assi AQ, AR, AP della superficse data ne' punti B, R, Q dati, saranno date le linee AR, AQ, AB, le quali essendo chiamate a, b, c, sarà l'equazione generale del piano secante $\frac{ax}{c} + \frac{ay}{b} + z = a$.

Ora per mezzo di questa equazione facendo svanire una delle variabili, e sostituendo il suo valore nell'equazione alla superficie, si avrà un' equazione composta di due variabili, la quale esprimerà la curva di projezione sopra uno de' piani, relativamente alla variabile scacciata dall'equazione. E' evidente, che la curva di projezione così trovata è dell'istessa spezie colla curva di sezione. Imperocchè l'ascissa RE della curva di sezione è all'ascissa AP della curva di projezione sul piano QAB, come RB è a AB. Nella medesima maniera EN è a PM, come RQ è a AQ. Onde essendo data l'equazione alla curva di projezione

zione ſul piano QAB, ſi avranno le coordinate RE, QN della curva di ſezione. Per eſempio, eſsendo RB $= m$, ſarà RE, $u = \frac{mx}{c}$, e $x = \frac{cu}{m}$. Di più ſuppoſto RQ $= n$, ſi avrà EN, $s = \frac{ny}{b}$, e $y = \frac{bs}{n}$. Dunque nell'equazione alla curva di projezione ſul piano QAB, ſi ſoſtituiſca in vece di x e y il loro valore $\frac{cu}{m}$, $\frac{bs}{n}$, ſi avrà l'equazione della curva di ſezione, la quale, come è evidente, ſarà dell'iſteſsa ſpezie che la curva di projezione.

Cor. Sia l'equazione alle parabole divergenti $xy^2 = ax^3 + bxx + ex + d$; ſarà, per il lemma precedente, $xy^2 = ax^3 + bxxz + exzz + dz^3$, l'equazione alle ſuperficie coniche che hanno queſte curve per baſi. Ora in queſta equazione, per mezzo dell'equazione generale al piano, ſi faccia ſvanire la variabile z, la quale è compoſta delle variabili x, y nel primo grado, e di coſtanti. Onde avendo nell'equazione della ſuperficie la variabile z al primo, ſecondo, e terzo grado, è evidente, che l'equazione alla curva, fatta la ſoſtituzione, conterrà le variabili x, y combinate inſieme, e con quantità coſtanti, di tutte le maniere poſſibili in una equazione del terzo grado. Perciò la detta equazione ſi potrà ridurre all'equazione generale del terzo ordine $a + by + cx$

$cx + dyy + exy + fxx + gy^3 + bxyy + mxxy + nx^3 = o$. Onde l'ombra delle parabole divergenti potrà produrre tutte le curve del terzo ordine. L'equazione precedente si trasformerà nelle quattro equazioni generali del Newton colli metodi cogniti dagli algebristi. Si può consultare in questa materia l'eccellente opera del Sig. Cramer intitolata: *Analisi delle curve*.

In un' altra maniera.

Sia una superficie qualunque espressa colle tre coordinate AP, x, PQ, y, QM, z (*fig.* 39.). Siano AP, PQ in un piano al quale s'intenda QM perpendicolare. Sia tagliata questa superficie da un piano qualunque, del quale la commune intersezione col piano di APQ sia DT. Dal punto A abbassando in DT, prolungata, la perpendicolare AE, sarà AE il seno, e DE il coseno dell'angolo d'inclinazione ADE. Sia M un punto della sezione cercata, dal quale si abbassi MT perpendicolare a DT, l'angolo MTQ sarà uguale all'inclinazione data. Siano DT, TM le coordinate della sezione. Dal punto T sull'asse AD si abbassi la perpendicolare DTV. Di più condotta la perpendicolare TN, essendo l'angolo TQP = TDV = ADE, si avranno, per la similitudine delli triangoli, li valori x, y, z. Sia AD = f, AE = a, DE = b, DT = t, TM = u, sarà AD (f): AE (a) = DT (t): TV = $\frac{at}{f}$. Di più AE (a):

DE

$DE(b) = TV\left(\frac{at}{f}\right) : DV = \frac{bt}{f}$. In oltre DT $(s) : MT\ (u) = DV\left(\frac{bt}{f}\right) : QT = \frac{bm}{g}$. Finalmente $AD(f) : AE\ (a) = QT\left(\frac{bu}{f}\right) : NT(PV) = \frac{abu}{ff}$. Onde $AP\ (x) = AV - PV = AD + DV - NT = f + \frac{bt}{f} - \frac{abu}{ff}$. Nell' istessa maniera $AD\ (f) : DE\ (b) = QT\left(\frac{bu}{f}\right) : QN = \frac{bbu}{ff}$. Onde $PQ(y) = TV + NQ = \frac{at}{f} + \frac{bbu}{ff}$. È evidente di più, che $QM\ (z) = \frac{bu}{f}$. Se nell'equazione della superficie in vece di x, y, z si sostituiscano i loro valori espressi per t, u, si avrà un'equazione composta delle sole variabili t, u e di costanti, che sarà per conseguenza l'equazione della sezione cercata.

Cor. 1. Poichè nelli valori di z, y, x le variabili u, t sono del primo grado, è evidente, che sostituendo questi valori nell'equazione della superficie conica, l'equazione alla curva non può arrivare a un grado più alto dell'equazione medesima alla superficie, Nulladimeno può accadere che

che l'equazione alla ſezione ſia d'un grado inferiore, diſtrugendoſi li termini più alti con ſegni contrarii.

Cor. 2. Sia l'equazione del cono retto, come nel lemma precedente, $\frac{aa}{bb} xx = yy + zz$. Soſtituendo in luogo di x, y, z i loro valori già trovati, dalla ſola oſservazione delli medeſimi valori ſi vede, che ſi avrà un'equazione compoſta delle variabili u, t in tutte le maniere poſſibili in un'equazione del ſecondo grado; onde ſi avrà la formola generale delle curve del ſecondo ordine, ovvero delle ſezioni coniche; e ſi avranno ſecondo li diverſi caſi le equazioni a una delle ſezioni coniche, variando la poſizione del piano ſecante colla determinazione delle coſtanti. Similmente ſi avrà l'equazione la più compoſta del terzo grado, ſe nell'equazione al cono, che ha per baſe le parabole divergenti $xy^2 = ax^3 + bxxz + exzz + dz^3$, ſi ſoſtituiſcano li valori delle medeſime x, y, z. Onde ſi vede ancora in queſt'altra maniera quel che è già ſtato dimoſtrato nelli due problemi precedenti.

NUM.

NUM. VI.

Della projezione delle curve.

LA projezione delle curve è una delle materie più importanti, e più utili della geometria. Il Newton nel lemma 21. delli principii ha accennato la dottrina delle projezioni, ovvero delle trasmutazioni colla sua solita brevità, ed eleganza. Ma essendo già stato illustrato diffusamente il detto lemma nelli nostri commenti a quella eccellente opera, mi contenterò ora di fare vedere come dalli principii di perspettiva si ricava la trasformazione delle curve.

PROBL. I.

Trasformare una curva qualunque data in un'altra dell'istesso genere.

Sia una curva qualunque HGI (*fig.*40.). Si conducano ad arbitrio le due parallele AO, BL, le quali tagliano la retta AB, data di posizione in A, B. Da un punto qualunque G della curva si conduca GD parallela ad AO. Di poi da qualche punto O dato nella linea OA, al punto D si conduca la retta OD. che incontrerà BL in *d*. Finalmente dal punto *d* si conduca *dg*, la quale faccia colla retta BL un angolo qualunque dato, talmente che *dg* sia ad O*d*, come DG ad OD, sarà *g* la projezione del punto G. Nell'istessa maniera

niera si troveranno gli altri punti della curva. E' evidente, che questa costruzione si riduce al primo problema della Perspettiva, essendo O il punto di veduta, o polo, e a il centro del quadro. Si troverà facilmente l'equazione della nuova curva; imperocchè per la similitudine delli triangoli aDO, AOD, sarà $ad : OA = Od : OD$, e per costruzione $od : OD = dg : DG$. Di più essendo parallele le rette AO, Bd, sarà $Od : OD = AB : AD$. Onde $ad : OA = dg : DG = AB : AD$, e perciò $AD = \frac{OA \times AB}{ad}$, e $DG = \frac{OA \times dg}{ad}$. Sia DG la prima ordinata $= y$, dg la seconda ordinata $= u$, la prima ascissa $AD = x$, la nova ascissa $ad = z$. Si faccia $OA = a$, $AB = b$, sarà $x = \frac{ab}{z}$, e $y = \frac{au}{z}$, dalli quali valori si potrà ricavare l'equazione della nova curva, sostituendo in vece di x, y i loro valori per z, u.

Sia per esempio l'equazione alle sezioni coniche $y^2 = px^2 + qx + s$, si avrà $u^2 = \frac{s}{a^2} \times z^2 + \frac{qb}{a} \times z + pb^2$. Sia $y^3 = px^3 + qx^2 + sx + t$, l'equazione alle cinque parabole divergenti,

genti, sarà $u^3 z = \frac{r}{a^3} \times z^3 + \frac{sb}{a} \times z^2 + qb^2 \times z + pb^3 a$. Generalmente l'equazione $y^m = px^n + qx^{n-1} + sx^{n-2} + tx^{n-3} + \&c. + w$, darà l'equazione alla nova curva $z^m = p \times b^n a^{n-m} + q \times \frac{b^{n-1} a^{n-m+1}}{m+1} \times z + s \times \frac{b^{n-2} a^{n-m+2}}{2} \times z^2 + t \times b^{n-3} a^{n-m+3} \times z^3 + \&c. + w \times a^{-m} \times z^n$. Si procederebbe nell'istesso módo, se l'equazione proposta conteneſſe qualunque funzioni delle variabili x, y. Se l'equazione ritrovata si doveſſe ridurre ad una forma più semplice, si adopererebbe ancora l'artifizio delle trasformazioni; per esempio, se secondo il metodo del Newton si doveſſe abbassare l'equazione, si troverebbe un'altra equazione della medesima curva, supponendo le ordinate parallele a qualche asintoto. Il calcolo è più lungo che difficile, e si può leggere in questa materia il libro già lodato del Sig. Cramer:

Cor. 1. Dalli valori ritrovati delle variabili x, y è manifesto, che l'equazione della curva trasformata è dell'istesso ordine colla nova curva. Onde ancora se l'equazione della prima curva fosse differenziale, sarebbe differenziale l'equazione della curva nova, *Cor.*

*Cor.*2. Col metodo delle projezioni ſi potrànno determinare le proprietà delle curve. Se in un piano originale vi ſia una retta qualunque, la quale prolungata, ſe ſia neceſſario, incontri la commune interſezione del piano originale, e del piano di projezione, la projezione d'un punto qualunque dato in queſta linea, tanto più, o meno ſarà diſtante dalla linea evaneſcente, quanto ſarà minore, o maggiore la diſtanza del punto dalla linea dirigente. Onde ſi ricava facilmente, che li rami infiniti d'una curva qualunque ſi buttano nella linea evaneſcente (ſarà a propoſito di rivedere in queſto luogo le definizioni date nel principio della Perſpettiva). Si potrà conoſcere dalla projezione della tangente ad una diſtanza infinita, ſe la linea evaneſcente diventi aſintoto della curva, ſe ne ſia ſecante, o tangente, e in quali punti. Mutata l'inclinazione delli piani, o la poſizione della figura data, talmente che la curva ſia ſecata dalla linea dirigente, da ogni interſezione naſceranno nella curva di projezione due rami iperbolici. Se la linea dirigente ſecaſſe la curva in due punti, condotte a queſti due punti due tangenti, che concorrano in un punto, ſi avranno per ogni punto di contatto due rami iperbolici alle aſintoti formate dalle tangenti. Se la linea dirigente è concepita moverſi d'un moto parallelo, finchè ſia tangente della curva, quanto più ſi accoſterà la mutua interſezione delle tangenti alla ſommità della curva, tanto più ſarà lontana la ſua projezione. Ma ſe l'interſezione cade nella ſommi-

ſommità medeſima, cioè nella linea dirigente, non vi ſaranno aſintoti, e li rami d'iperbolici diventeranno parabolici. Nell'iſteſſa maniera, ſe la linea dirigente ſia ſecante della curva in un punto, e tangente in un altro, vi ſaranno due rami iperbolici, e due parabolici; allora la curva ſarà di quel genere di curve, che ſi chiamano *Iperbole parabole*. Li rami infiniti d'una curva ſono ſempre in numero paro. Onde in alcuni caſi può accadere che li rami ſiano poſti dalla medeſima parte. Per eſempio, la curva eſpreſſa per l'equazione $y = \frac{x^2}{a} + \sqrt{ax}$ ha due rami parabolici. Ma ſupponendo l'aſciſſa x negativa, l'ordinata y ſarà imaginaria, e per conſeguenza un ramo non andando dalla parte delle ordinate imaginarie, è neceſſario, che li due rami vadano dall'iſteſſa parte.

Cor. 3. Il piano originale, ed il piano di projezione ſono reciprochi tra di loro, e per conſeguenza ancora ſono reciproche la linea dirigente, e la linea evaneſcente. Onde è evidente, che una curva qualunque può conſiderarſi come prodotta dalla projezione d'un'altra, cioè un punto qualunque della curva di projezione diventerà il punto originale medeſimo, ſe ſi concepiſca la curva di projezione come curva originale; e poichè la tangente della curva nell'interſezione colla linea dirigente diventa aſintoto, vicendevolmente gli eſtre-

eſtremi dell'aſintoto ritorneranno al contatto nella linea evaneſcente. Onde ſi ricava, che un aſintoto retta incontra la curva in tanti punti, quante ſono le dimenzioni della curva meno due; imperocchè le due interſezioni dalle quali è formato il contatto ſvaniſcono nella projezione. Onde l'aſintoto d'una linea del terzo ordine ſeca la curva in un ſolo punto, e l'aſintoto dell'iperbola conica in neſſuno. Due rami parabolici trovandoſi in qualche curva tolgono due delle aſintoti rette, che poteva avere la curva; così nelle linee del terzo ordine, le quali ammettono tre aſintoti per il numero delli punti nelli quali poſſono eſſere ſecate dalla linea dirigente, ſe vi ſaranno due rami parabolici, non vi reſterà che un aſintoto per i due rami iperbolici. Le interſezioni, e le inflеſſioni reſteranno ancora nella curva di projezione, purchè non ſiano nella linea dirigente. Rimarranno anche l'interſezione, il contatto, il nodo, il punto di flеſſo contrario &c. Onde ſiegue, che la curva di projezione ſarà dell'iſteſſo ordine colla curva trasformata; imperocchè il grado della curva è dimoſtrato dal numero delli punti, nelli quali è tagliata da una retta, e queſto numero è l'iſteſſo nella curva di projezione. Si deve eccettuare il caſo in cui l'interſezione è nella linea dirigente, la quale eſſendo nella projezione mandata all'infinito, ſaranno le interſezioni della curva di projezione $n-1$, ſe le interſezioni della curva trasformata ſiano n. E queſta è la ragione per la qua-

quale le ordinate parallele a qualche asintoto nell'equazione d'una curva sono abbassate d'una dimenzione :

PROBL. II.

Enumerare le specie delle curve col metodo delle projezioni.

Siano da enumerarsi le curve prodotte dalla parabola divergente coll' ovale conjugata, la quale curva è espressa coll'equazione $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, nella quale supposta $y = o$, li tre valori dell'asciss x sono reali e disuguali, si avrà la parabola divergente campaniforme, che è la specie 67. nell'enumerazione fatta dal Newton. Si possono considerare diversi casi. Si supponga primieramente la linea dirigente perpendicolare all'asse della figura, o parallela alle ordinate. Se la linea dirigente (*fig.* 41.) seca l'asse in A fuori della curva, la parabola anderà in iperbola conchoidale, l'asintoto sarà la linea evanescente, nella quale ancora si butta l'ordinata infinitamente distante. L'ovale anderà in un altra ovale posta nel vertice della conchoidale. Sarà la specie 39. dell'enumerazione citata. Se la linea dirigente sia tangente dell'ovale in B, si muta l'ovale in parabola, e sarà la specie 55. Se la linea dirigente seca l'asse in O, e l'ovale nelli punti T, T, condotte alli medesimi punti T, T, le tangenti che concorrano verso A, le loro projezioni saranno due asintoti alle iperbole formate dall' ova-

ovale. Il concorso delle asintoti caderà sopra la linea evanescente, che sarà la terza asintoto. Specie 21. Se la linea dirigente seca l'asse in D, talmente che le tangenti in T, T diventino parallele, queste tangenti si butteranno in due asintoti che concorreranno nella terza asintoto. Specie 31. Sia l'interzezione nel punto E, talmente che le tangenti concorrano dall'altra parte, il triangolo formato dalle asintoti nella projezione caderà al di sotto dell'asintoto della conchoidale. Specie 20. Se la linea dirigente sia tangente dell'ovale in F, sarà mutata l'ovale in parabola, il vertice della quale sarà sopra l'asintoto della conchoidale. Specie 56. Se la linea dirigente taglia l'asse in G tra la parabola e l'ovale, la projezione sarà la specie 40. Se la linea dirigente sia tangente della parabola in H, si avrà la curva iperbolo parabolica con un ovale posta sull'asintoto. Questa specie non si trova nell'enumerazione fatta dal Newton; la sua equazione è $xy^2 = bx^2 + cx + d$, che è la medesima colla specie 55., purchè le radici dell'equazione $bx^2 + cx + d = o$, si pongano negative, o che il coefficiente c sia affirmativo. Se la linea dirigente taglia la parabola nelli punti S, S, ove è concava verso l'asse, condotte le tangenti SO, SO, concorreranno tra le parabole e l'ovale, per esempio in O, e chiuderanno l'ovale nell'angolo che ivi formano; ma prodotte dall'altra parte taglieranno li rami parabolici. Perciò la projezione sarà composta di tre iperbole con un ovale compresa

preſa nel triangolo delle aſintoti. L'iperbola nella quale ſi butta l'arco compreſo tra la linea dirigente e il vertice ſi chiama *inſcritta*; le due altre prodotte da rami infiniti ſi dicono *ambigene*. Queſta ſpecie è ſtata omeſſa dal Nevvton.

Ho conſiderato il caſo, in cui la linea dirigente è parallela alle ordinate, ora ſi ſupponga che non vi ſia queſto paralleliſmo. Se la linea dirigente ſeca la parabola in un punto qualunque T dall'una o dall'altra parte del fleſſo contrario (*fig.*42.) e non arrivi all'ovale, la tangente TQ in queſto punto ſarà aſintoto della curva di projezione. Le eſtremità delli rami nella projezione ſi uniranno con un fleſſo contrario nella linea evaneſcente; dall'ovale naſcerà un ovale, e la curva diventerà un' *Iperbola anguinea* coll'ovale. Specie 33. Rimanendo il punto T colla tangente TQ, ſi concepiſca intorno a eſſo punto rivolgerſi la linea dirigente, finchè ſia tangente dell'ovale in N, o, K, reſterà l'iperbola anguinea, e l'ovale ſarà trasformata in parabola. Specie 52. Si rivolga la linea dirigente, talmente che tagli l'ovale nelli punti R, R, ove le tangenti dell'ovale formano colla tangente TQ il triangolo SQM, overo queſte tangenti ſiano parallele, nell'uno e nell'altro caſo la projezione ſarà compoſta di due iperbole inſcritte alle aſintoti formate dalle tangenti dell'ovale, e di una terza iperbola anguinea. Specie 9. Se la poſizione della linea dirigente ſia tale, che le tangenti in R, R concorrano colla terza TQ, le aſintoti paſſeranno per l'iſteſſo punto

nella curva di projezione. Specie 26. Se la linea dirigente ſia ſecante della parabola in T, e tangente in X, o, X2, la projezione ſarà compoſta di due iperbole parabole, una delle quali è ſecata dall'aſintoto con un ovale conjugata. Specie 46. Se la linea dirigente ſeca la parabola nelli punti T, B, C, le tangenti in queſti punti TQ, FG, HI che non poſſono ne convergere nell'iſteſſo punto, ne eſſere tutte parallele, produranno altrettante aſintoti che formano il triangolo nel quale è compreſa l'ovale; ma la parabola darà tre iperbole, delle quali quella che naſce dalli rami infiniti ſarà circonſcritta: imperocchè le tangenti nelli punti eſtremi T, C incontrano tutte due li rami, almeno nella projezione; ma la tangente in B incontra l'una delle parti intermedie TB, o BC, purchè il punto B non ſia un fleſſo contrario; onde quella parte produrrà un iperbola ambigena; la terza darà l'iperbola inſcritta. Specie 1. Se la linea dirigente coincida coll'aſſe, le tre tangenti parallele nella projezione paſſeranno per quell'iſteſſo punto della linea evaneſcente nel quale concorrono le eſtremità delli rami. Specie 27.

Nella medeſima maniera che la prima parabola divergente è ſtata ridotta in diverſe ſpecie, potrebbero ridurſi ancora le quattr' altre parabole conſiderate dal Nevvton, o anche qualunque altre curve di qualunque genere. Onde ſi dimoſtrerebbe anche in queſto modo quel che ha aſſerito Nevvtono dell'ombra delle parabole divergenti. *Cor. Probl.2. num.v.*

Schol.

Scol. 1. Sarà facile il ridurre le curve di projezione alle equazioni Nevvtoniane. Imperocchè le tre ſommità della figura trasformata B, F, H (*fig.* 41.) ſupponendo l'ordinata $= o$, daranno le ſommità della curva di projezione. Preſa per prima ordinata la linea evaneſcente, la poſizione della linea dirigente farà conoſcere la poſizione di queſte ſommità, cioè, ſi avranno li ſegni delli valori dell'aſciſſa, eſſendo l'ordinata $= o$. In queſta maniera ſi vede, che nella ſpecie 40. le projezioni delli punti B, F cadono al di ſopra della linea evaneſcente, la projezione del punto H cade al di ſotto della medeſima. Nell'equazione della curva $xy^2 = -ax^3 + ax^2 + cx + d$, eſſendo l'ordinata $= o$, vi ſaranno due valori dell'aſciſſa x col medeſimo ſegno, e il terzo col ſegno contrario. E' evidente che la curva di projezione è eſpreſſa con queſta equazione; imperocchè queſta curva avendo un diametro, manca il termine ey; e poichè oltre le ſommità nelle quali ſi buttano li punti F, H nella projezione, l'ordinata diventa imaginaria, il termine il più alto ax^3 deve avere il ſegno $-$. Se la linea dirigente paſſando per qualche ſommità, l'iſteſſa ſommità ſi butti all'infinito, l'equazione Nevvtoniana ſi abbaſſa d'un grado, e in vece di $xy^2 = ax^3$ &c., ſi fa $xy^2 = bx^2 + cx + d$. Si deve finalmente oſſervare che li punti di fleſſo contrario reſtano nella figura trasformata, e nella figura di projezione, purchè la linea dirigente non paſſi per eſſi punti. Dalla projezione ſi conoſcerà verſo

quale parte della projezione cadano li detti punti. Per determinare a quale equazione appartenga qualche projezione, per esempio, la specie 9.; dal punto T (*fig.*42.) ove la dirigente seca la curva, condotte tutte le tangenti possibili TX, TX², TK, TN, le loro projezioni parallele tra di loro, e all'asintoto prodotta dalla TQ, saranno tangenti della curva di projezione; il numero delle tangenti, e la loro posizione rispettivamente a TQ mostreranno le dimenzioni dell'equazione, e li segni delle radici. Sia l'equazione $x^4 + bx^3 +$ &c. $= o$, la quale esprima le ascisse compresse tra qualche asintoto considerata come prima ordinata, e tra le rette parallele all'asintoto tangente della curva, o che passano per un punto doppio. In questa equazione descritta dal Nevvton nell'enumerazione delle linee del terzo ordine, le radici sono reali e disuguali. Ma le tangenti TK, TX nella projezione buttandosi al di sotto di TQ, e TX², TN al di sopra, si vede che due radici hanno delli segni contrarii alle due altre. Presa per prima ordinata l'asintoto prodotta dalla tangente dell'ovale SM; poichè dal punto del contatto R una sola retta SM può essere tangente della curva, le radici dell'equazione ax^4 &c. saranno tutte imaginarie.

*Scol.*2. E' evidente che si potranno trattare nell'istessa maniera le curve di ordini superiori, avendo prima enumerate le curve *genitrici*, ovvero trasformate. Per esempio nelle curve del quarto ordine si trasformeranno le curve espresse colle

colle equazioni y^2 e $y4 = ax4 + bx3 + cx^2 + dx + e$. Nel quinto ordine le curve rappresentate per le equazioni y^2 e $y4 = ax5 + bx^4 +$ &c. Nel sesto e settimo ordine, le dimenzioni dell'ordinata siano y^2, $y4$, y^6 &c. Queste equazioni trasformate per il metodo delle projezioni oblique, saranno generali nell'ordine della curva genitrice. Ma sarebbe cosa troppo lunga di trattare questa materia più diffusamente.

NUM. VII.

Delle projezioni circolari, e del loro uso nell' aſtronomia.

LA projezione del cerchio generalmente conſiderata non ſolamente contiene tutta la dottrina delle ſezioni coniche, ma anche è di grandiſſimo uſo nell'aſtronomia. Onde aggiungerò in queſto luogo alcune propoſizioni appartenenti a queſta materia, le quali ſi poſſono ricavare facilmente dalli principii precedenti.

PROBL. I.

Ritrovare la projezione d'un cerchio in un piano qualunque dato di poſizione.

Sia LS (*fig.*43.) l'interſezione, HN la linea dirigente, CI la linea evaneſcente, APTB un cerchio per il centro del quale s'intenda condotto un piano verticale che tagli il piano del cerchio nel diametro AB, e ſi ſupponga HN fuori del cerchio. Si ritrovi *ab* projezione del diametro AB; di più condotte dal punto H, ove la linea dirigente incontra il piano verticale, le rette HΓ, HT tangenti del cerchio in T, T, ſi trovi la projezione *tt* della retta TT, l'elliſſe *aptb* deſcritta con gli aſſi *ab*, *tt*, ſarà la projezione del cerchio dato APTB. Imperocchè le rette AH, TH, TH concorrendo nella linea dirigente, le tangenti dell'

dell'elliſſe in t, t ſaranno parallele all'aſſe ab, cioè tt ſarà l'aſſe conjugato di ab. Per eſprimere la curva analiticamente, ſia PM ordinata del cerchio $= y$, l'aſciſſa HM $= x$, il diametro AB $= d$; la diſtanza HB del cerchio dalla linea dirigente $= l$, ſarà $y^2 = -x^2 + \overline{d + 2l} \times x - d + l \times l$. Si faccia pm ordinata nova $= v$, l'aſciſſa $Cm = z$, HG $= a$, CG $= r$, ſi avrà per l'equazione della projezione $v^2 = -\frac{\overline{d+l}}{y^2} \times l \times z^2 + \frac{\overline{a+2l}}{r} \times a \times z - a^2$, che è l'equazione a un elliſſe, la quale ſarà data di ſpecie, purchè ſia dato il coefficiente del termine $-z^2$. Imperocchè gli aſſi ab, tt ſaranno tra di loro come r a $\sqrt{d+l \times l}$. ovvero come CG alla tangente HT. Se foſſe $\frac{\overline{d+l} \times l}{y^2} = 1$ la projezione diventerebbe un cerchio.

Ho ſuppoſto in queſto caſo, che la linea dirigente HN non toccaſſe il cerchio ABT, ora ſia la linea dirigente tangente in B, eſſendo $l = o$ l'equazione della curva di projezione, ſarà $v^2 = \frac{da}{r} \times z - a^2$, che eſprime una parabola, il parametro della quale $= \frac{da}{r}$. Finalmente ſe la linea dirigente è ſecante del cerchio, per eſempio;

in TKT, essendo l negativa, l'equazione della curva di projezione sarà $q^2 = \frac{a-l}{r^2} \times l + \frac{d-2l}{r} \times a - a^2$. Onde in questo caso si avranno due iperbole opposte, le sommità delle quali sono a, b, le asintoti sono le due tangenti, ed il loro concorso è il centro delle iperbole. Si può leggere una soluzione consimile dell'istesso problema nelli nostri comenti alli principii del Newton *Lem.* 22.

Cor. 1. Se il cono BTAZ (*fig.* 44.) descritto sul circolo BTA è secato nel diametro AB da un piano BAZ perpendicolare alla base, si troverà la posizione del piano secante, talmente che la sezione sia data di specie. Considererò il caso dell'ellisse. Prodotto, se è necessario, il diametro AB, si abbassi dal vertice Z la retta ZH, talmente che il rettangolo AH × HB sia ad HZ^2 in ragione data di F a G, cioè in ragione duplicata dell'asse perpendicolare sul piano verticale all'altro asse; condotta la retta CG parallela ad HZ, la sezione del cono fatta per CG da un piano retto al piano verticale, sarà la sezione cercata. Avendo abbassato la perpendicolare ZI; si conduca la retta ZH per mezzo dell'equazione quadratica $\overline{G-F} \times x^2 + G \times AB \pm 2BI \times F \times x = F \times ZB^2$, nella quale equazione, se le radici x, o BH hanno il medesimo segno, li due punti H saranno dalla parte di B. Se siano uguali vi sarà una sola

ZH

ZH determinata dal *maſſimum* della ragione $\frac{F}{G}$.

Se le radici ſono imaginarie o impoſſibili, la ragione richieſta è troppo grande. Si determinerà facilmente queſta maſſima ragione, conducendo nel triangolo ZBA la retta *ps* parallela al diametro AB, e ſecata in *r* dalla retta *tu*, talmente che il triangolo Z*tu* ſia iſoſcele. Di più ſi faccia il rettangolo *ur* × *rt* a *rs*², come *tu*² (G) a F, ſarà la ragione $\frac{F}{G}$ la maſſima. Ovvero ancora condotta Z*b* parallela a *tu*, ſarà la maſſima $\frac{F}{G} = \frac{Ab \times bB}{Zb^2}$. Nel cono retto la ragione maſſima è d'ugualianza, cioè il piano ſecante è parallelo alla baſe.

Cor. 2. Se la curva originale foſſe una ſezione conica qualunque, la projezione della quale doveſſe eſſere una ſezione conica data di ſpecie, ſi procederebbe coll'iſteſſo metodo. Sia per eſempio ABΓ un'elliſſe, l'aſſe AB = *t*, l'aſſe conjugato = *c*, l'equazione della curva di projezione ſarà

$$v^2 = \frac{-c^2 \times t + l \times + l}{t^2 r^2} z^2 + \frac{ac^2 \times t + 2l}{t^2 r} z - \frac{c^2 a^2}{t^2}$$

. Onde il problema ſi riduce a trovare l'inclinazione del piano CG, nel quale la projezione ſarà un elliſſe, o un iperbola di ſpe-

cie data, prendendo $\frac{t+l}{t^2} \times l$, ovvero $\frac{AHB}{ZH^2} = \frac{b^2}{c^2} \times \frac{F}{G}$; o se la sezione dovesse essere un cerchio $\frac{AHB}{ZH^2} = \frac{t^2}{c^2}$.

Cor.3. Se il punto Z fosse dato fuori del piano verticale che passa per l'asse, dato il piano di projezione sarà data la linea dirigente HN, alla quale si faccia parallelo il diametro $EF = c$ e si dica il diametro conjugato $= t$ essendo dato l'angolo delle ordinate, si troverà la curva di projezione come sopra. Ma se fosse proposto di ritrovare la posizione del piano secante talmente che la Sezione sia data di specie; avendo condotto il diametro HBA, il rettangolo AHB deve essere a ZH^2 in ragione data. Di più tirata HN parallela alle ordinate al diametro AB, l'angolo ZHN deve essere retto: overo se la base sia una parabola l'angolo ZHN è retto, e il rettangolo fatto da HB e dal parametro del diametro sarà a HZ^2 in ragione data, la quale sarà ragione d'uguaglianza, se la Sezione cercata è un cerchio. Aggiungerò la soluzione di questo ultimo caso il quale contiene tutti gli altri più semplici, poichè colli principii precedenti una base qualunque si trasforma facilmente in parabola, e il circolo in una Sezione data di specie.

Dal

Dal punto dato Z (*fig.*45.) si abbassi nel piano della parabola la perpendicolare ZI che l'incontra nel punto I dal quale si alzi IR perpendicolare all'asse. Dal punto cercato H, se sia HB diametro della parabola che incontri la retta IR in M e la curva in B, si conduca al punto B la tangente BX e l'ordinata all'asse BL, la retta HN parallela a BX tagli l'asse in N; finalmente condotte le rette ZH, ZN, ZR sia NK normale ad HM fatta questa costruzione, chiamato p il parametro dell'asse, sarà $p + 2LX$, ovvero $p + 2HK$ il parametro del diametro cercato HB, e BX^2 (HN^2) $= \frac{1}{2} HK \times \overline{p + 2HK}$, ed essendo per la condizione del problema il quadrato di HZ uguale al rettangolo di HB nel parametro del diametro, si avrà $NX + \frac{1}{2} HK \times \overline{p + 2HK}$, cioè $\overline{RV - KM} \times \overline{p + 2HK} = ZH^2 + HN^2 = ZR^2 + KM^2 = ZN^2$, essendo ZHN, ZRM angoli retti. Ma $MR^2 = HN^2 - HK^2 = \frac{1}{2} HK \times p$, e $IM = IR - \sqrt{\frac{1}{2} HK \times p}$; di più $HK : MR = IM : HM$. Onde sarà $KM = HM - HK = \frac{IR \times \sqrt{\frac{1}{2} HK \times p} - \frac{1}{2} HK \times p}{HK} - HK$. Que-

Queſto valore della retta KM ſi faccia uguale al valore che ſi ricava dall'equazione quadratica $ZR^2 + KM^2 = \overline{RV - KM} \times \overline{p + 2HK}$, e ſcrivendo x per l'incognita HK, ed il quadrato QQ per le quantità cognite $p \times RV + \frac{1}{2} p^2 - ZR^2$ ſi avrà $x^3 + \overline{p + 2RV} \times x^2 + QQ \times x - \frac{1}{2} p \times IR^2 = o$. Ora eſsendo data per la coſtruzione dell'equazione cubica la retta $HK = 2LV$, ſarà dato di poſizione il diametro BH. E' data ancora per l'equazione quadratica la retta KM o NR; è dato il punto N, dal quale condotta la retta NH parallela alla tangente BX e che incontra il diametro BH in H, eſsa ſarà la linea dirigente, e ſi avràla retta ZH. Il valore negativo della retta KM ſuppoſta dall'altra parte del punto R darà un'altra linea dirigente che ſodisferà al problema.

Scol. Il corollario precedente contiene il problema propoſto e ſciolto da Carteſio: cioè data di poſizione e di grandezza qualunque Sezione conica, parabola, iperbola, o elliſſe, e dato un punto fuori del piano delle medeſime, ritrovare la poſizione e la grandezza del cerchio che è la baſe del cono dalla Sezione del quale poſſono eſſere formate le dette figure. Queſt'iſteſſo problema è ſtato ſciolto di poi da molti. Se ne legge una ſoluzione elegante nelle Sezioni coniche del Marcheſe

chese del Hopital *lib.*10. *prop.*10., e l'equàzione alla quale è arrivato il celebre Autore è affatto l'istessa colla precedente. E' evidente che questo medesimo problema si potrebbe scogliere col mezzo delle formole analitiche del *num.*v. ; poichè non dipende che dall'espressione del piano secante e dalla natura della Sezione. Si può consultare quel che ne ha scritto il dottissimo Hermanno *tom.*6. delle memorie di Pietro burgo.

PROBL. II.

Spiegare le projezioni astronomiche.

Sia Z un punto nella superficie della sfera (*fig.*44.) CG l'intersezione del piano verticale e d'un piano parallelo al cerchio, del quale è Z il polo. Sia BTA il cerchio del quale si cerca la projezione. La retta HZ parallela a CG cada nel piano del cerchio in H, e si conduca la tangente HT del cerchio in T. Poichè di punti Z, T sono nella superficie della sfera, le tangenti ZH, TH sono uguali, e la projezione nel piano CG, o in un'altro piano parallelo a BG sarà un cerchio. Queste sorte di projezioni sono chiamate *Stereografiche*.

Se la retta ZV che incontra il diametro BA in V, e *ba* in *u* divide in due parti uguali l'angolo BZA, la medesima retta prolungata caderà nel polo del circolo BTA ; onde la sua projezione sarà il punto *u*. Si alzi nel punto V un piano parallelo al piano di projezione il quale tagli il piano verticale in VQ. Se intorno a ZV come asse ima-

ma-

maginiamo rivolgerſi un piano che ſeca il piano dell' aſse, ed il piano condotto per VQ, è evidente che gli angoli fatti dalle interſezioni colle rette VA, VQ ſaranno uguali; poichè li piani reſtano li medeſimi riſpettivamente all'aſſe di rivoluzione. Di più gli angoli nel piano VQ, ſono uguali agli angoli in *ua*; onde ſaranno uguali agli angoli nel piano BTA, o in un altro piano qualunque parallelo al medeſimo, e ſpecialmente nel piano che tocca la sfera nel polo del circolo BTA. Dal che ſi ricava che gli angoli qualunque in una ſuperficie sferica reſtano li medeſimi nella projezione, la quale coſa ſi può anche facilmente dedurre dalla projezione delle rette tangenti della sfera in un punto qualunque. Queſta oſſervazione potrebbe eſſere di ſomma utilità nella Trigonometria sferica.

Se li punti V, *u* dividono proporzionalmente li diametri AB, *ab* la retta condotta per la projezione *u* del polo, taglia archi ſimili agli archi originali ſcambievolmente verſo le parti delli punti V, *u*; per eſempio, ſe (*fig.*46.) *ab* ſia la projezione del diametro AB, e *u* la projezione del polo, ſi troverà la projezione *ac* dell'arco AC dividendo AC in V talmente che ſia AV : BV = *bu* : *au*, e condotta la retta CV che tagli l'arco BK, l'arco ſimile, *ac*, ſarà l'arco cercato.

Non ſarà più difficile di ſpiegare un'altra ſpecie di projezione chiamata *gnomonica* nella quale l'occhio ſi ſuppone nel centro della sfera. In queſto caſo la projezione delli cerchj maſſimi ſo-

no

no linee rette, delle quali quelle che rappresentano li meridiani o li cerchi orarii convergono nella projezione del polo del mondo. Il meridiano normale al piano dell'oriuolo lo taglierà nella *Sostilare*. Se nel piano del meridiano dal centro si alzi una perpendicolare all'asse, che incontrerà il piano dell'oriuolo in un punto dal quale si tiri una perpendicolare alla Sostilare, questa perpendicolare prodotta all'infinito dall'una e l'altra parte sarà la projezione del cerchio *equinoziale*. Onde presa la perpendicolare all'asse per raggio, la perpendicolare alla Sostilare rappresenterà la tangente. Perciò si potrà sempre tagliare in questa tangente un segmento proporzionale a un'arco qualunque dell'equinoziale, e si condurranno le linee orarie.

Le projezioni delli cerchj minori saranno Sezioni coniche date, purchè sia dato di posizione l'oriuolo. E' utilissima la projezione delli tropici nel disegnare gli oriuoli Babilonici e Italici, nelli quali le ore non cominciano dal meridiano, ma dall'orizonte, cioè dal nascere o tramontare del Sole, e le ore sono indicate non dall'ombra dell'asse, come negli altri oriuoli, ma dal vertice dello stile il quale si considera come centro della sfera.

Ho spiegato in questa proposizione la projezione Stereografica e gnomonica della sfera, resterebbe ora a dire qualche cosa della projezione ortografica, ma essendo facilissima basterà quel che ne è stato detto nel principio della perspettiva.

Scol.

Scol. Si capiſce facilmente la teoria e la coſtruzione degli oriuoli Babilonici, e Italici. Immaginiamo il Sole naſcere in tre punti qualunque dell'orizonte, ſecondo la ſua diverſa *amplitudine ortiva*. Si concepiſca di poì il Sole alzato ſull'orizonte, e ſia il centro del Sole in tre altri punti corriſpondenti: quali eſſendo traſportati per il moto diurno, è evidente che ſaranno nel medeſimo cerchio maſſimo della sfera, del quale la projezione gnomonica ſarà una linea retta che ſi chiamerà *oraria*, poichè per mezzo di eſſa ſi avrà il tempo dal naſcere o tramontare del Sole. Dunque in queſte ſorte di oriuoli ſi deve trovare la projezione del polo, dell'equinoziale, dell'orizonte, e del tropico. Si ſegni il punto, in cui il tropico taglia l'orizonte verſo *l'occaſo* nell'oriuolo Babilonico, e verſo *l'orto* nell'Italico; queſti punti ſaranno la projezione del centro del Sole oriente o occidente nelli Solſtitii, dalli quali punti ſi conteranno le ore. Si trovi la projezione del meridiano che paſſa per l'interſezione del tropico, e dell'orizonte, e ſi noti il punto in cui la detta projezione incontra l'equinoziale. Da queſto punto ſi taglino li ſegmenti dell'equinoziale corriſpondenti a tutte le ore. Per le eſtremità o li termini di queſti ſegmenti ſi conducano dal polo delle rette le quali tutte incontreranno il tropico; onde ſi avranno due punti delle medeſime. Dal punto in cui l'equinoziale e l'orizonte ſi interſecano, ſi taglino verſo l'iſteſſa parte i ſegmenti orarii, li termini delli quali ſi uniſcano colli punti

ora-

orarii già ritrovati, alzato lo ſtile, e ſcancellate le linee inutili, ſarà compito l'oriuolo. Si ſuole adoperare la projezione del tropico, perchè in eſſo ſi terminano le linee orarie. Queſto ſcolio diventerà più chiaro conſultando in qualche libro di Gnomonica la figura d'un oriuolo Italico o Babilonico.

Dalli medeſimi principii ſi potrebbe ricavare la coſtruzione delle carte idrografiche, le quali dipendono dalla projezione d'un Sferoide, e conſiderando lo Sferoide compreſſo verſo li poli o verſo l'equatore ſi determinerebbero le differenze nell'una o l'altra ipoteſi. Ma ſi vedano le tavole Loxodromiche del Sig. Murdok. Finirò queſto libro coll'oſſervare che il metodo delle projezioni può eſſere utiliſſimo nelli calcoli più ſublimi; la projezione delle curve e delle ſuperficie curvilinee produce ſpeſſe volte delle facilità ſorprendenti nelle loro quadrature. Ma queſta materia richiede un trattato a parte che io ſpero di dare alla luce.

IL FINE.

Tab. I.

Fig. 3.

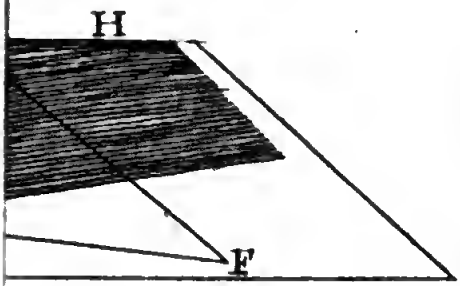
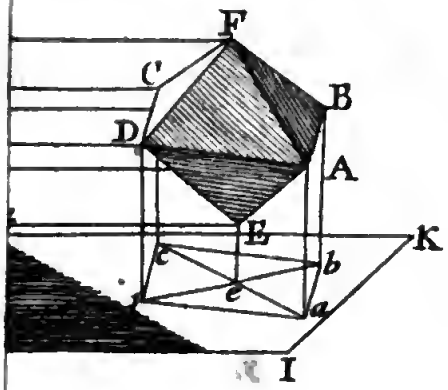
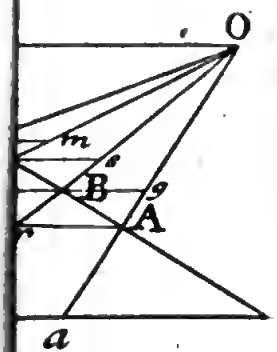


Fig. 2.

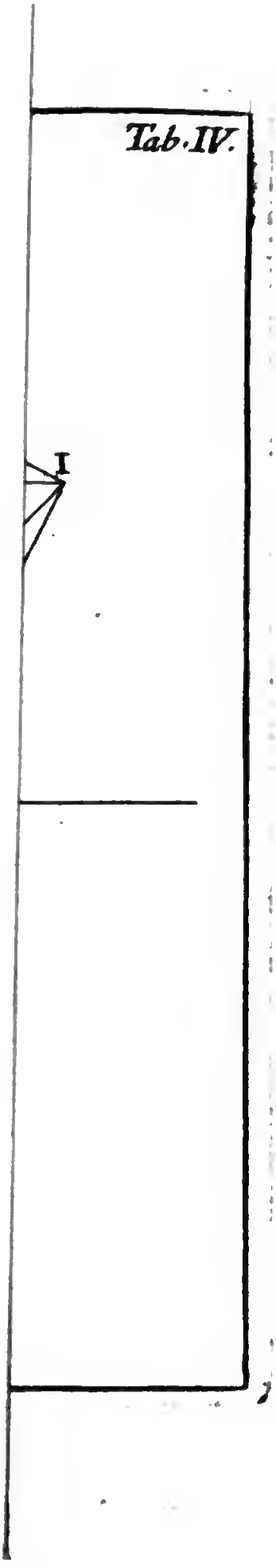


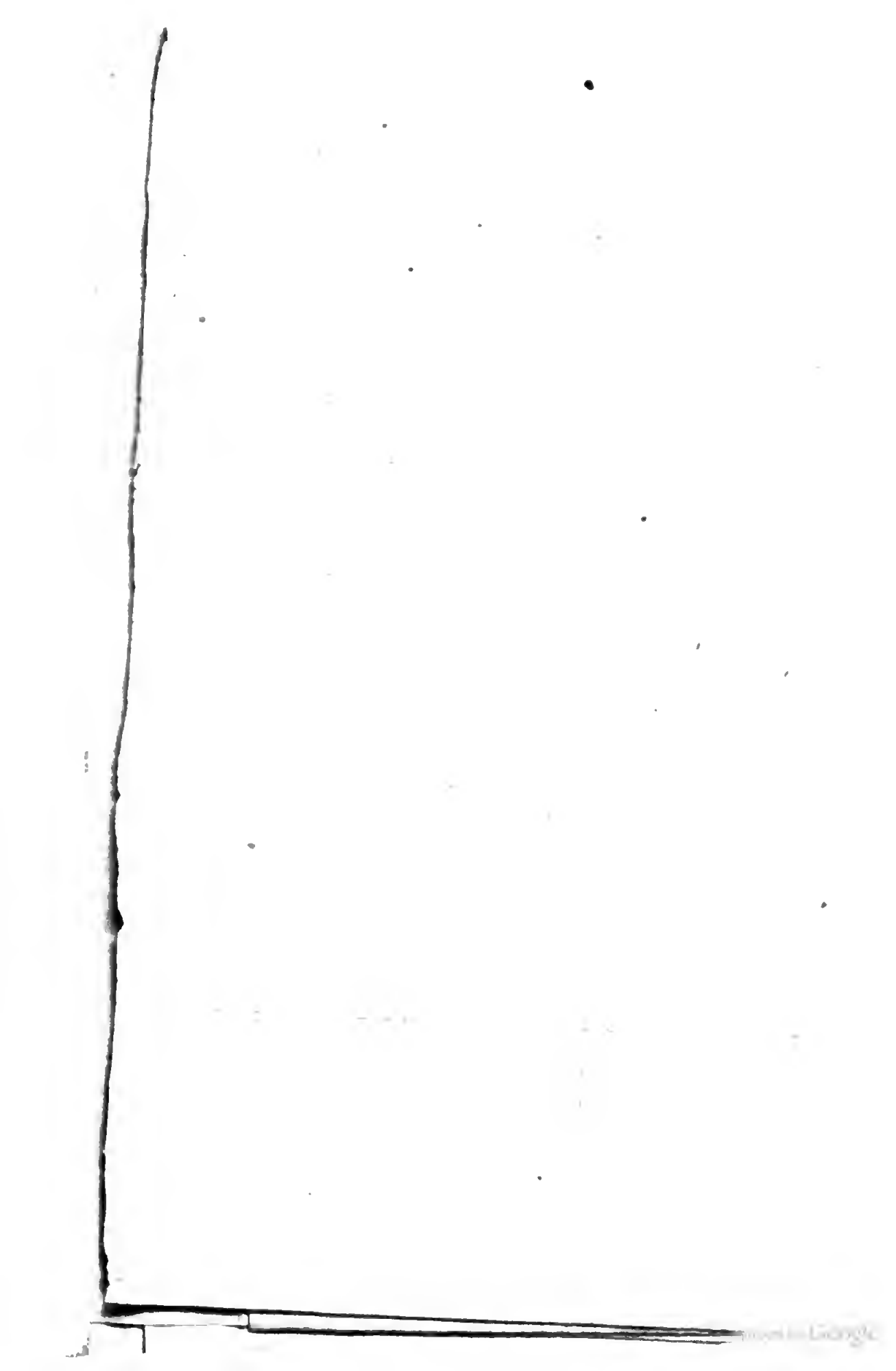
Tab. II.

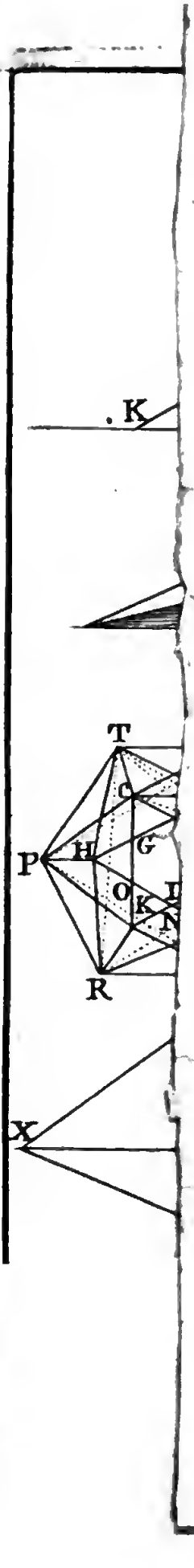


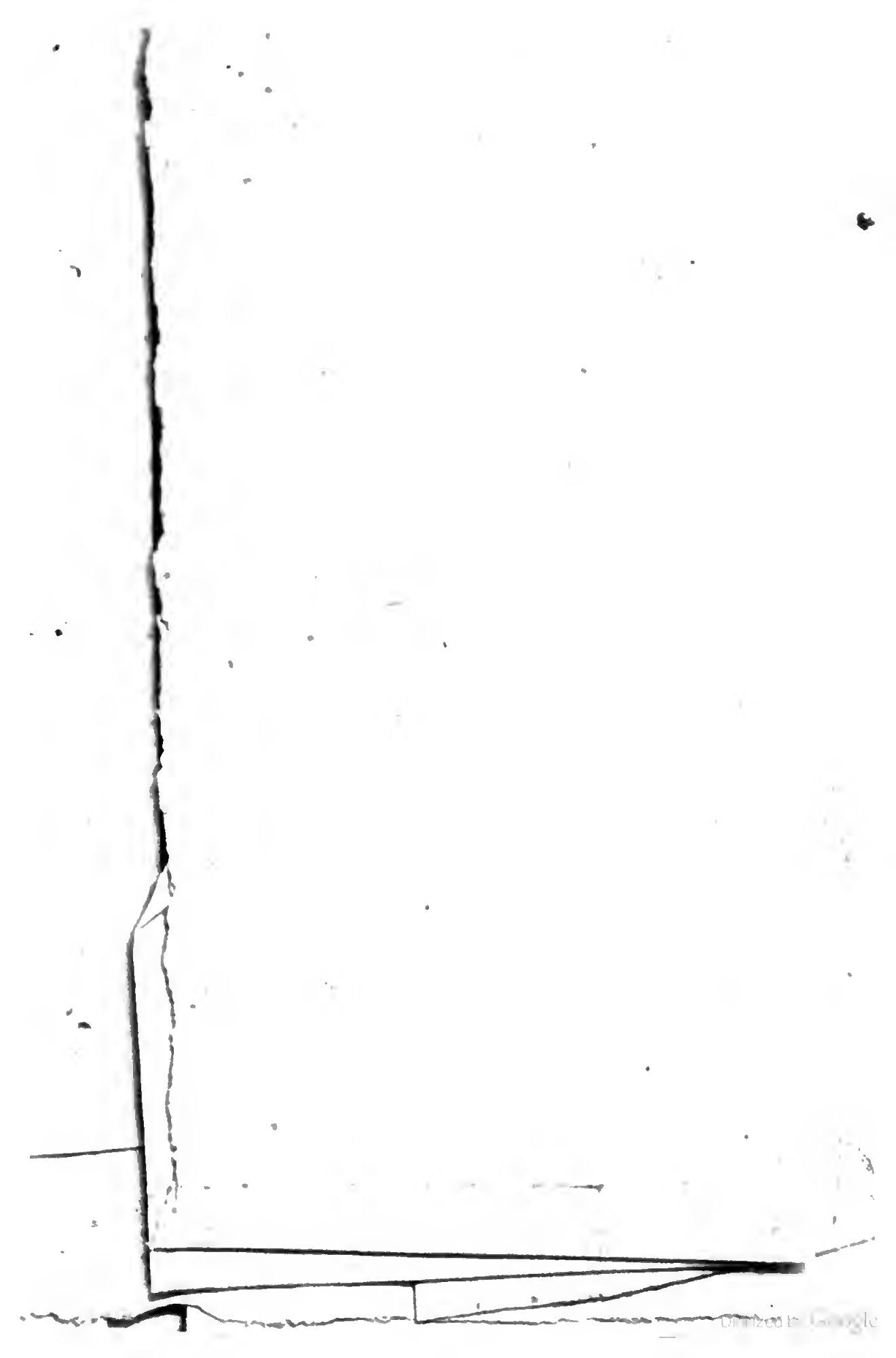
Tab. III.

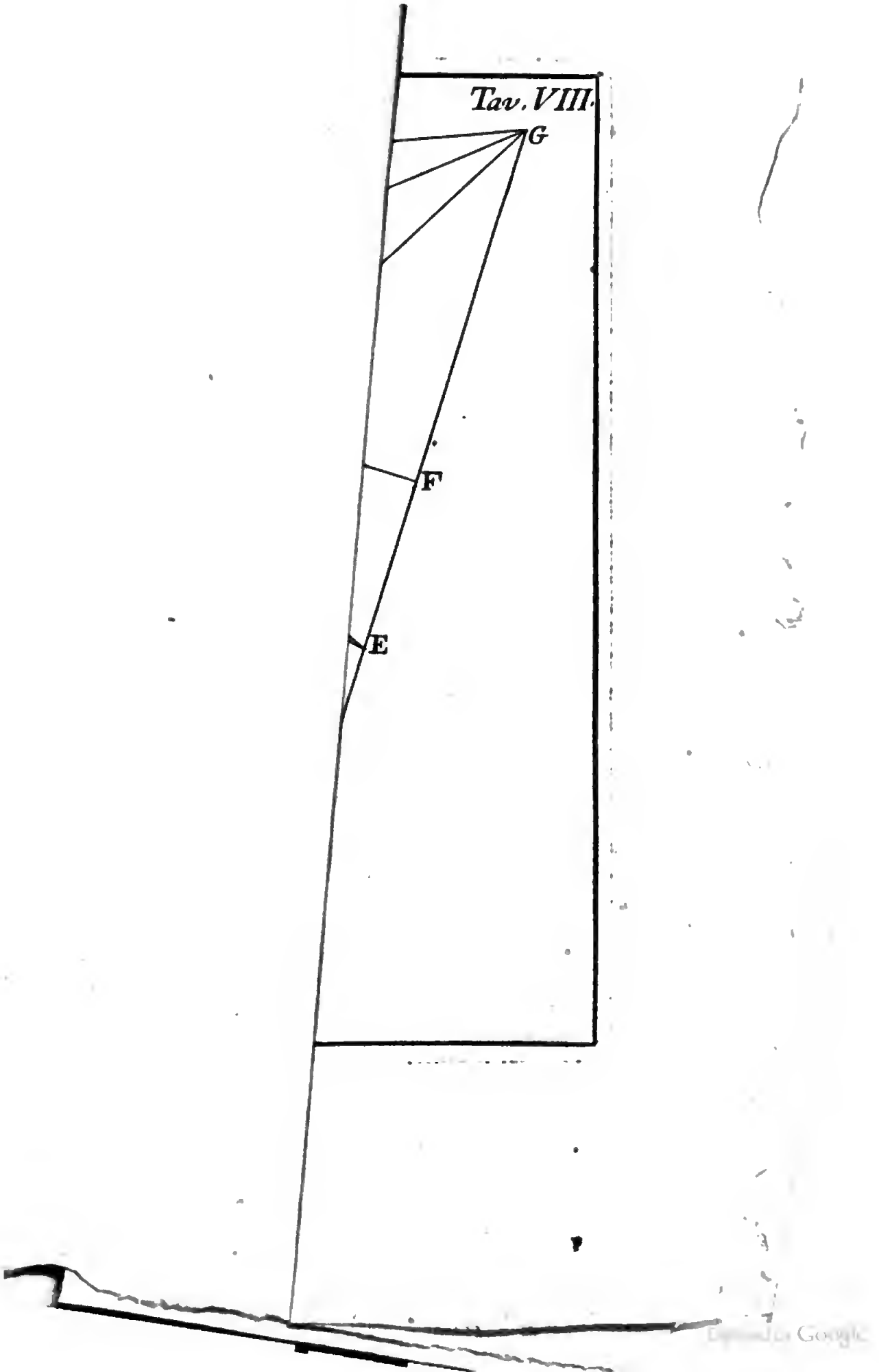
Digitized by Google

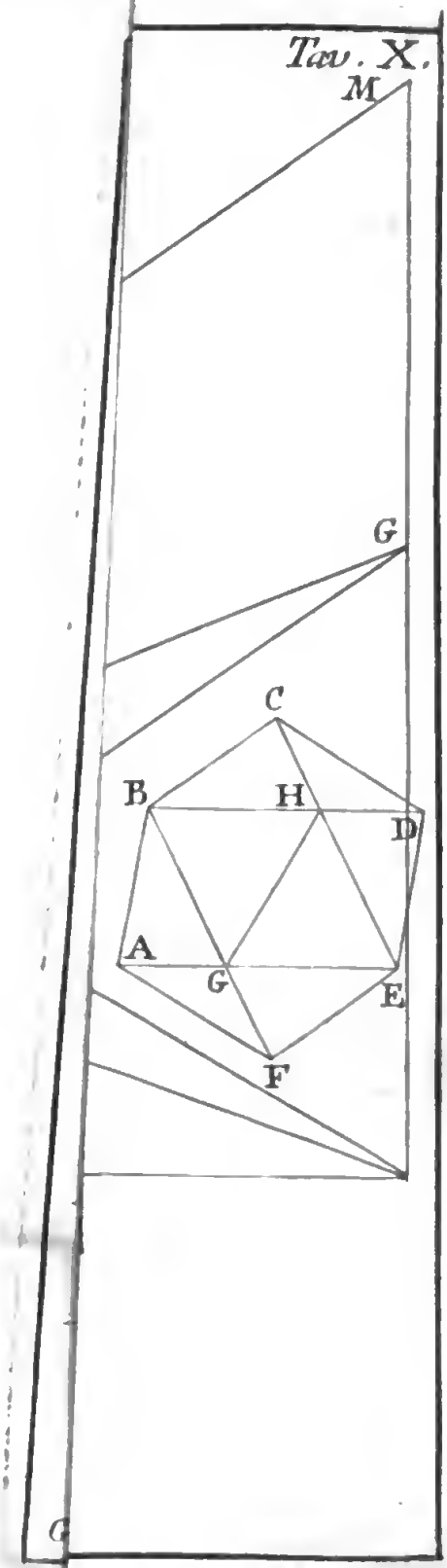

Tab. IV.
I



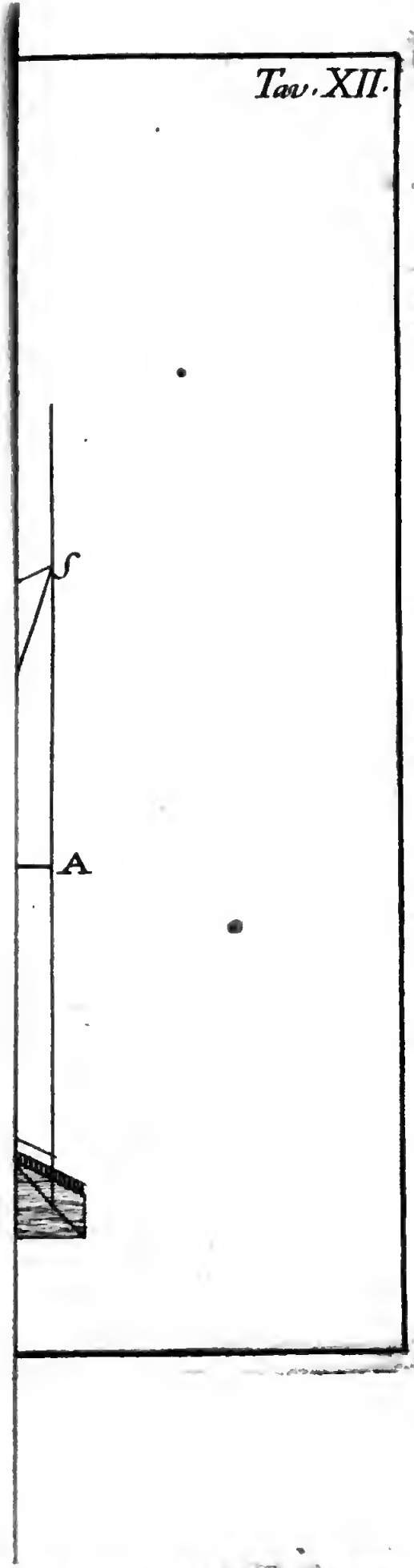

K
T
C
P
H
G
O
K
L
N
R
X



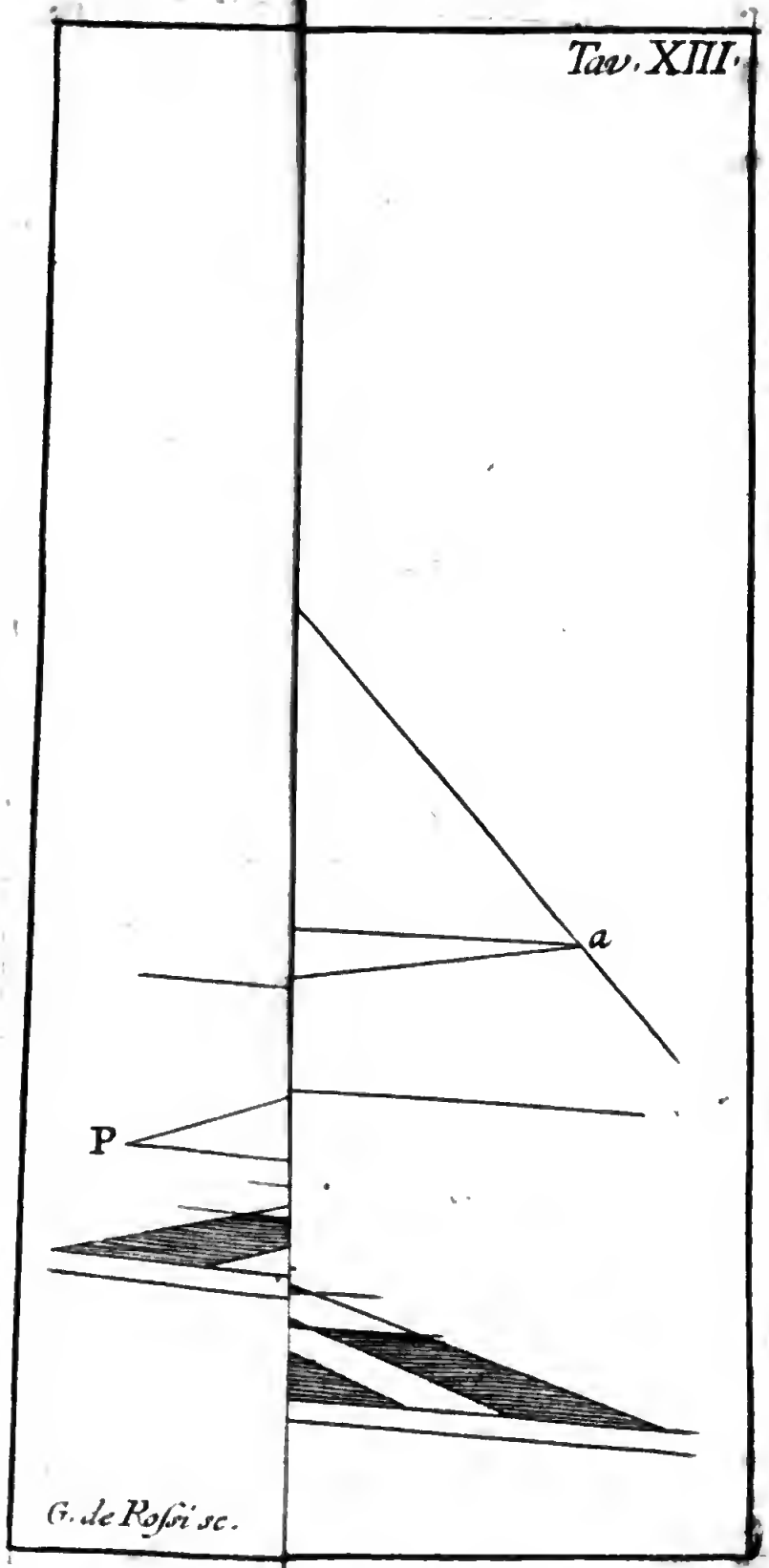

Tav. VIII.
G
F
E


Tav. X.
M
G
C
B
H
D
A
G
E
F
G

Tav. XII.



Tav. XIII.



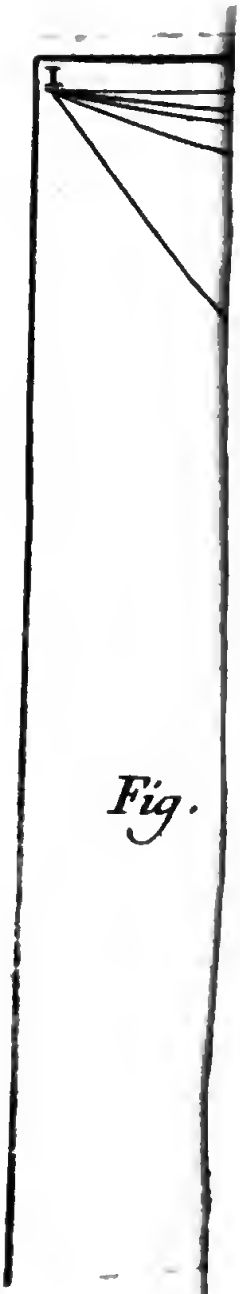
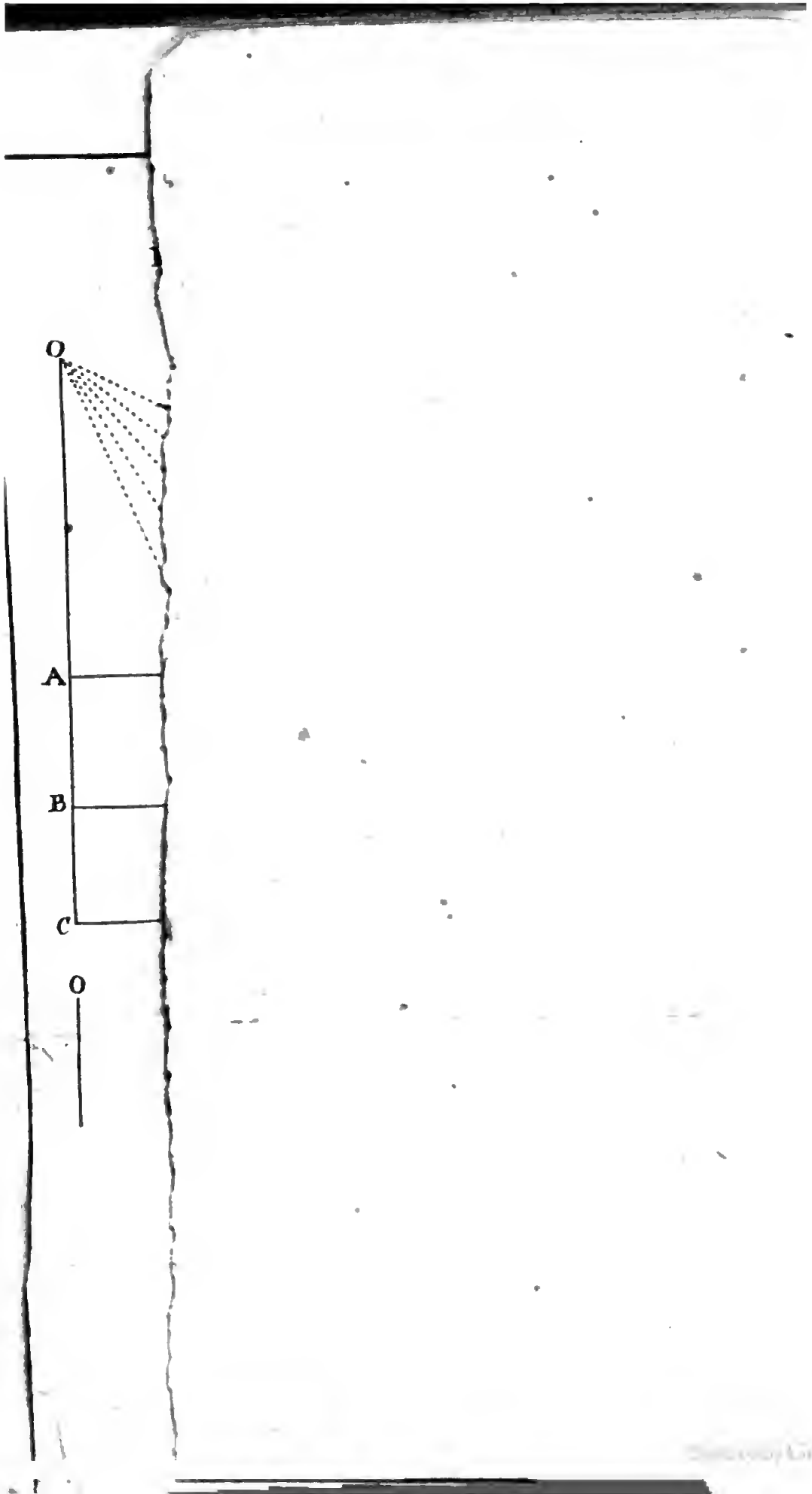
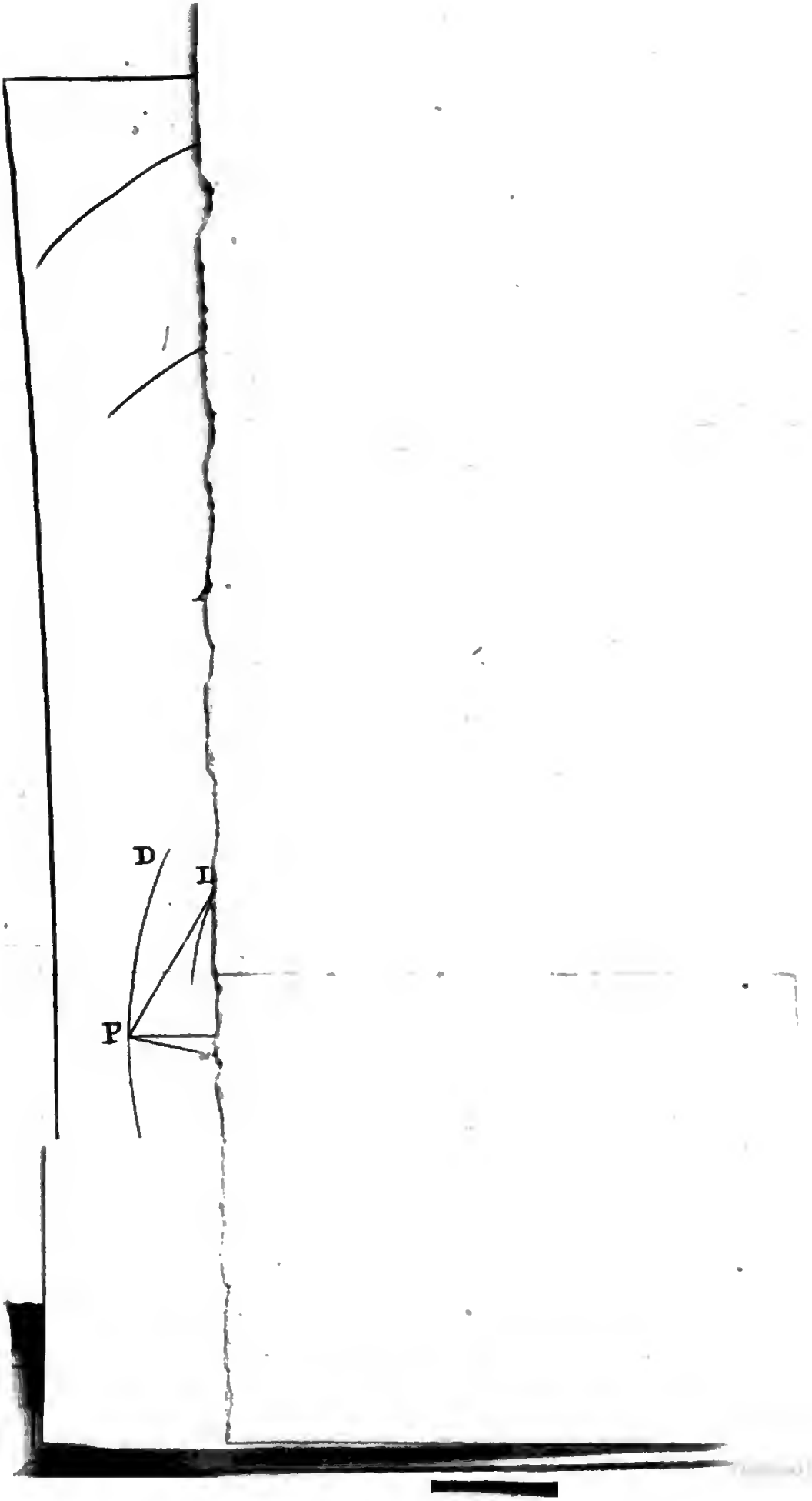
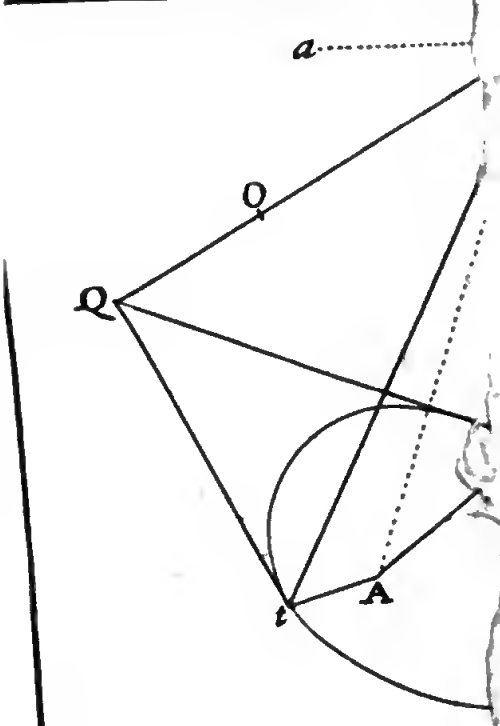


Fig.


O
A
B
C
O


D
I
P


a
Q
Q
t
A

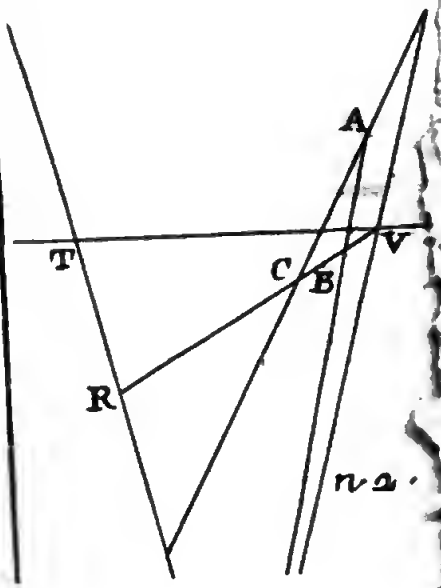

A
T
C
B
V
R
n a

Fig. 37.

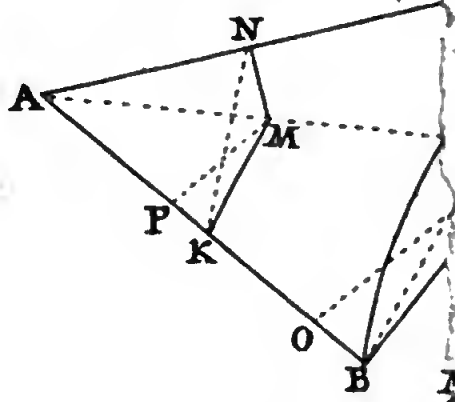
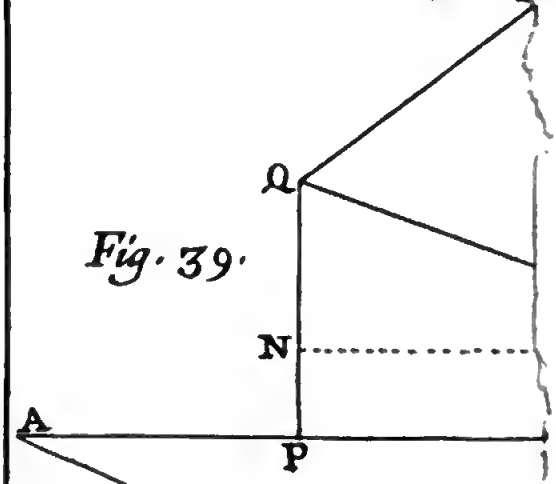


Fig. 39.



Digitized by Google

00565380B